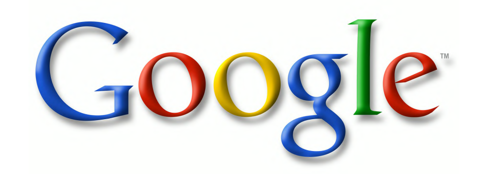
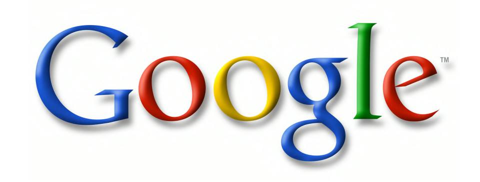
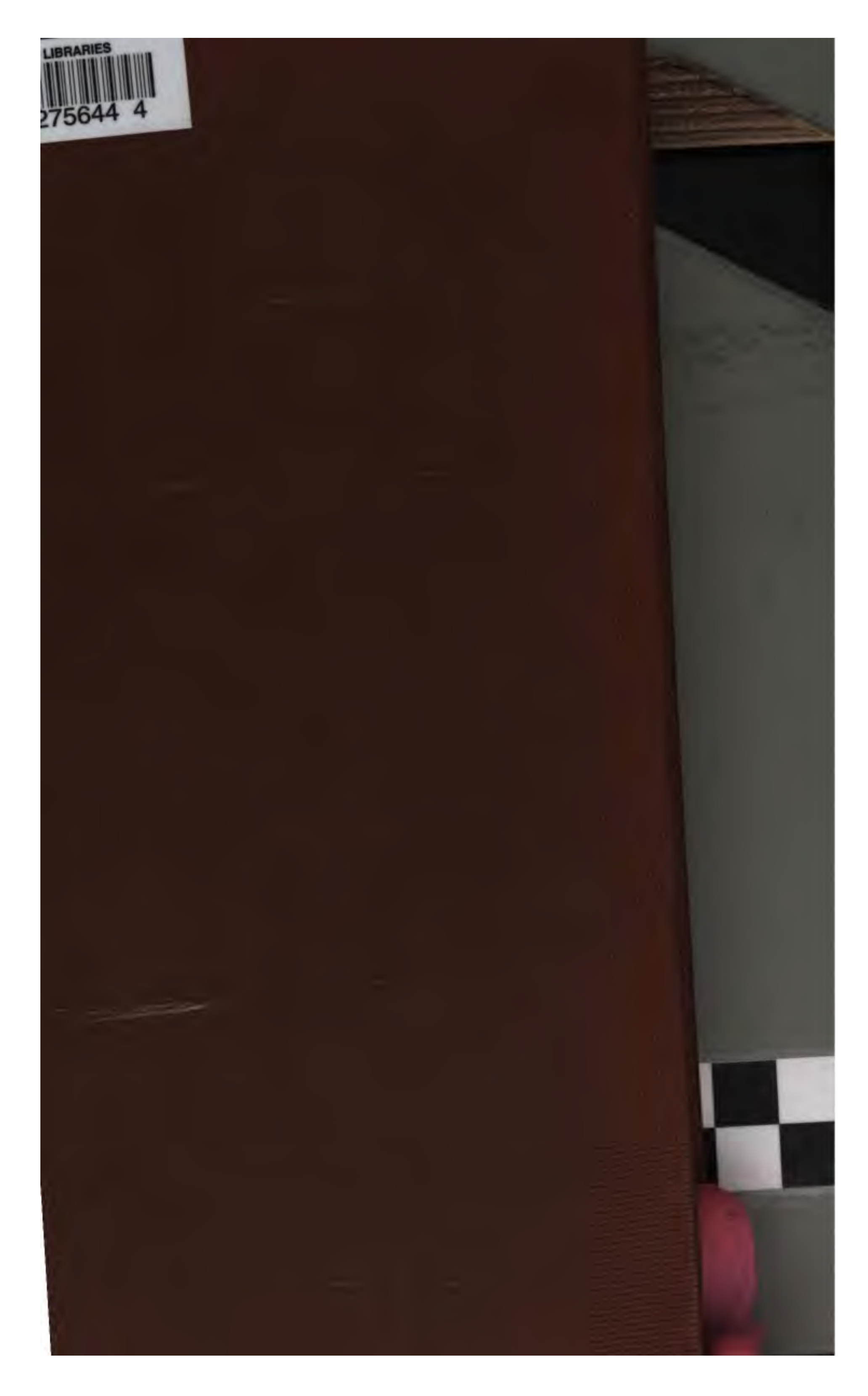

Google




LIBRARIES
275644 4







NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1865.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

PROUHET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.



DEUXIÈME SÉRIE.

TOME QUATRIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1865.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A DEUX ET TROIS VARIABLES;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Napoléon.

SECONDE PARTIE.

I. Les coordonnées d'un point par rapport à des axes ox, oy, oz faisant entre eux les angles φ, ψ, ω étant x, y, z, celles du même point par rapport à des axes de même origine faisant entre eux les angles Φ, Ψ, Ω étant X, Y, Z, soit

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$
$$= AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + 2B''XY.$$

Comme on a identiquement

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\varphi + 2xz\cos\psi + 2xy\cos\omega$$
$$= X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\Phi + 2XZ\cos\Psi + 2XY\cos\Omega,$$

il s'ensuit

$$(a+\lambda)x^2+(a'+\lambda)y^2+(a''+\lambda)z^2+2(b+\lambda\cos\varphi)yz$$
$$+2(b'+\lambda\cos\psi)xz+2(b''+\lambda\cos\omega)xy$$
$$=(A+\lambda)X^2+(A'+\lambda)Y^2+(A''+\lambda)Z^2+2(B+\lambda\cos\Phi)YZ$$
$$+2(B'+\lambda\cos\Psi)XZ+2(B''+\lambda\cos\Omega)XY.$$

Si l'on détermine λ de telle façon que le premier membre soit le produit de deux fonctions entières en x, y, z, le second membre sera également le produit de deux fonctions entières en X, Y, Z.

De là deux équations ayant les mêmes racines; ce sont :

$$(a+\lambda)(b+\lambda\cos\varphi)^2+(a'+\lambda)(b'+\lambda\cos\psi)^2$$
$$+(a''+\lambda)(b''+\lambda\cos\omega)^2-(a+\lambda)(a'+\lambda)(a''+\lambda)$$
$$-2(b+\lambda\cos\varphi)(b'+\lambda\cos\psi)(b''+\lambda\cos\omega)=0$$

et

$$(A+\lambda)(B+\lambda\cos\Phi)^2+(A'+\lambda)(B'+\lambda\cos\Psi)^2$$
$$+(A''+\lambda)(B''+\lambda\cos\Omega)^2-(A+\lambda)(A'+\lambda)(A''+\lambda)$$
$$-2(B+\lambda\cos\Phi)(B'+\lambda\cos\Psi)(B''+\lambda\cos\Omega)=0.$$

Développées, ces équations deviennent

$$m\lambda^3-n\lambda^2-p\lambda+\delta=0,$$
$$M\lambda^3-N\lambda^2-P\lambda+\Delta=0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$m=1-\cos^2\varphi-\cos^2\psi-\cos^2\omega+2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega,$$
$$n=a\sin^2\varphi+a'\sin^2\psi+a''\sin^2\omega+2b(\cos\psi\cos\omega-\cos\varphi)$$
$$+2b'(\cos\varphi\cos\omega-\cos\psi)$$
$$+2b''(\cos\varphi\cos\psi-\cos\omega),$$
$$p=b^2-a'a''+b'^2-a''a+b''^2-aa'$$
$$+2(ab-b'b'')\cos\varphi+2(a'b'-b''b)\cos\psi$$
$$+2(a''b''-bb')\cos\omega,$$
$$-\delta=ab^2+a'b'^2+a''b''^2-aa'a''-2bb'b'',$$

et pareillement

$$M = 1 - \cos^2\Phi - \cos^2\Psi - \cos^2\Omega + 2\cos\Phi\cos\Psi\cos\Omega,$$

$$\begin{aligned} N = A\sin^2\Phi + A'\sin^2\Psi + A''\sin^2\Omega & \\ & + 2B\ (\cos\Psi\cos\Omega - \cos\Phi) \\ & + 2B'(\cos\Omega\cos\Phi - \cos\Psi) \\ & + 2B''(\cos\Phi\cos\Psi - \cos\Omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA' & \\ & + 2(AB - B'B'')\cos\Phi \\ & + 2(A'B' - B''B)\cos\Psi \\ & + 2(A''B'' - BB')\cos\Omega, \end{aligned}$$

$$-\Delta = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'',$$

les coefficients de ces équations sont proportionnels, donc

$$(1) \qquad \frac{m}{M} = \frac{n}{N} = \frac{p}{P} = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Nous avons ainsi trois relations. Nous pouvons en faire dépendre des développements analogues à ceux que nous avons présentés dans la première partie de ce travail.

Remarquons avant tout que si les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, ces relations se réduisent à

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} & a + a' + a'' = A + A' + A'', \\ & b^2 - a'a'' + b'^2 - a''a + b''^2 - aa' \\ & = B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A - B''^2 - AA', \\ & ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' \\ & = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''. \end{aligned} \right.$$

On voit par là que les coefficients de l'équation en s ne changent pas quand les axes coordonnés se changent en d'autres rectangulaires comme les premiers. C'est ce qu'on déduit souvent de considérations différentes.

Les relations (1) pourraient s'établir elles-mêmes au moyen de l'équation en s formée pour des axes obliques.

II. *Théorèmes d'Apollonius étendus aux surfaces du second degré.*

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à ses axes, et soit

$$\frac{X^2}{a'^2}+\frac{Y^2}{b'^2}+\frac{Z^2}{c'^2}-1=0$$

l'équation de cette surface par rapport à trois diamètres conjugués qui font entre eux les angles φ, ψ, ω. Les relations (1) appliquées à ces équations deviennent

$$\frac{1-\cos^2\varphi-\cos^2\psi-\cos^2\omega+2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega}{1}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin^2\varphi}{a'^2}+\dfrac{\sin^2\psi}{b'^2}+\dfrac{\sin^2\omega}{c'^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\frac{\dfrac{1}{a'^2b'^2}+\dfrac{1}{b'^2c'^2}+\dfrac{1}{c'^2a'^2}}{\dfrac{1}{a^2b^2}+\dfrac{1}{b^2c^2}+\dfrac{1}{c^2a^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{a'^2b'^2c'^2}}{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}.$$

Donc

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2,$$

$$a'^2b'^2c'^2(1-\cos^2\varphi-\cos^2\psi-\cos^2\omega+2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega)$$
$$=a^2b^2c^2$$

et

$$b'^2c'^2\sin^2\varphi+c'^2a'^2\sin^2\psi+a'^2b'^2\sin^2\omega=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2,$$

c'est-à-dire que :

1° La somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante;

2° Le parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués a un volume constant;

3° La somme des carrés des faces est constante.

Ces théorèmes s'étendent aux deux hyperboloïdes.

III. Soit

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = 0$$

l'équation d'une surface du second degré ayant un centre, et soient Φ, Ψ, Ω les angles des axes coordonnés.

Si l'origine est transportée au centre (α, β, γ), l'équation deviendra

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy + \frac{\mathrm{L}}{\Delta} = 0,$$

en désignant

$$\mathrm{C}\alpha + \mathrm{C}'\beta + \mathrm{C}''\gamma + \mathrm{D} \quad \text{par} \quad \frac{\mathrm{L}}{\Delta}:$$

on a comme ci-dessus (p. 7),

$$-\Delta = \mathrm{A}\mathrm{B}^2 + \mathrm{A}'\mathrm{B}'^2 + \mathrm{A}''\mathrm{B}''^2 - \mathrm{A}\mathrm{A}'\mathrm{A}'' - 2\mathrm{B}\mathrm{B}'\mathrm{B}''$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}' & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' \end{vmatrix}.$$

En conséquence,

$$\mathrm{L} = -\mathrm{C}\begin{vmatrix} \mathrm{C} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{C}' & \mathrm{A}' & \mathrm{B} \\ \mathrm{C}'' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' \end{vmatrix} - \mathrm{C}'\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{C}' & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{C}'' & \mathrm{A}'' \end{vmatrix}$$
$$- \mathrm{C}''\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{C} \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}' & \mathrm{C}' \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{C}'' \end{vmatrix} + \mathrm{D}\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' \\ \mathrm{B}'' & \mathrm{A}' & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' \end{vmatrix},$$

d'où

$$L = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Je passe de là à un système d'axes formé par trois diamètres conjugués faisant entre eux les angles φ, ψ, ω. L'équation de la surface se change en

$$aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + \frac{L}{\Delta} = 0.$$

Les carrés des trois demi-diamètres positifs ou négatifs étant désignés par u, v, w, nous aurons

$$au + \frac{L}{\Delta} = 0, \quad a'v + \frac{L}{\Delta} = 0, \quad a''w + \frac{L}{\Delta} = 0,$$

et les relations du n° I donneront

$$\frac{M}{m} = \frac{N}{-\frac{L}{\Delta}\left(\frac{\sin^2\varphi}{u} + \frac{\sin^2\psi}{v} + \frac{\sin^2\omega}{w}\right)}$$

$$= \frac{P}{-\frac{L^2}{\Delta^2}\left(\frac{1}{uv} + \frac{1}{vw} + \frac{1}{wu}\right)} = \frac{\Delta}{-\frac{L^3}{\Delta^3}\frac{1}{uvw}},$$

d'où l'on tire

$$uvw = -\frac{M}{m}\frac{L^3}{\Delta^4},$$

$$u + v + w = P\frac{L}{\Delta^2}$$

et

$$\frac{\sin^2\varphi}{u} + \frac{\sin^2\psi}{v} + \frac{\sin^2\omega}{w} = -\frac{m}{M}\frac{\Delta}{L}N.$$

Supposons que les trois diamètres conjugués soient les axes de la surface.

Alors la dernière de ces trois équations donnera

$$uv + vw + wu = \frac{L^2}{\Delta^3} N.$$

En conséquence, u, v, w, carrés des demi-axes, seront les racines de l'équation

$$V^3 - P \frac{L}{\Delta^2} V^2 + \frac{L^2}{\Delta^3} NV + M \frac{L^3}{\Delta^4} = 0.$$

IV. Soient données deux équations

$$\begin{gathered} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz \\ + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \\ ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz \\ + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0, \end{gathered}$$

qui représentent deux ellipsoïdes ou deux hyperboloïdes égaux rapportés, le premier à des axes faisant entre eux les angles Φ, Ψ, Ω, le second à des axes dont les angles sont φ, ψ et ω.

D'après l'équation obtenue ci-dessus, les deux surfaces seront égales, si l'on a

$$P \frac{L}{\Delta^2} = p \frac{l}{\delta^2}, \quad \frac{L^2}{\Delta^3} N = \frac{l^2}{\delta^3} n$$

et

$$M \frac{L^3}{\Delta^4} = m \frac{l^3}{\delta^4};$$

d'où

$$\frac{\Delta}{\delta} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

V. Si les deux équations du second degré représentent deux paraboloïdes elliptiques ou hyperboliques égaux,

les conditions d'égalité seront, avec $\Delta = 0$, $\delta = 0$,

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons déduire de là une équation du second degré donnant les deux paramètres d'un paraboloïde.

Soit

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} - 2x = 0$$

la seconde équation du paraboloïde considéré, en coordonnées rectangulaires.

Les conditions précédentes deviendront

$$\frac{P}{-\frac{1}{pp'}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}.$$

Ici

$$l = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p'} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{pp'}.$$

Donc

$$\frac{P}{l} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{N}{-(p+p')l}\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$l = \frac{P^2}{LM} \quad \text{et} \quad p + p' = \frac{NL^{\frac{1}{2}}}{P^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi

$$pp' = -\frac{LM}{P^2} \quad \text{et} \quad p + p' = N\left(\frac{L}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc p et p' seront les racines de l'équation

$$\varpi^2 - N\left(\frac{L}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}\varpi - \frac{LM}{P^2} = 0.$$

Si les premiers axes coordonnés sont rectangulaires, cette équation sera

$$\varpi^2 - (A + A' + A'')\left[\frac{L}{(B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - A''A - AA')^3}\right]^{\frac{1}{2}}\varpi$$
$$- \frac{L}{(B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - A''A - AA')^2} = 0.$$

VI. Les deux équations du second degré représenteront deux cônes égaux, si l'on a, avec $L = 0$, $l = 0$, $\Delta \gtrless 0$, $\delta \gtrless 0$,

$$\frac{\Delta}{\delta}\frac{N}{n} = \left(\frac{P}{p}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\frac{M}{m} = \left(\frac{P}{p}\right)^3.$$

VII. Les deux équations du second degré donneront deux ellipsoïdes ou deux hyperboloïdes semblables, si l'on a

$$\frac{L}{\Delta^2}P = \frac{1}{K}\frac{l}{\delta^2}p,$$
$$\frac{L^2}{\Delta^3}N = \frac{1}{K^2}\frac{l^2}{\delta^3}n,$$
$$\frac{L^3}{\Delta^4}M = \frac{1}{K^3}\frac{l^3}{\delta^4}m,$$

d'où

$$K = \frac{l}{L}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\frac{p}{P} = \frac{l}{L}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{l}{L}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Les conditions de similitude sont donc

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}},$$

et d'ailleurs il faudra que l'on ait $K > 0$.

VIII. Pour deux paraboloïdes, il résultera de là une seule condition de similitude, à savoir

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2 = \frac{M}{m} \cdot \frac{P}{p}.$$

Cette condition peut s'obtenir par l'équation en ϖ. Deux paraboloïdes seront semblables si leurs paramètres sont proportionnels. Cela donne

$$n\left(\frac{l}{p^3}\right)^{\frac{1}{2}} K = N\left(\frac{L}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\frac{lm}{p^2} K^2 = \frac{LM}{P^2},$$

d'où

$$K = \frac{N}{n}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^3}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2}{P^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\frac{N}{n} = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2 = \frac{M}{m} \cdot \frac{P}{p}.$$

De plus,

$$K = \frac{N}{n}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p^3}{P^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$K = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{p}{P},$$

K étant le rapport de similitude.

L'élimination de $\frac{\Delta}{\delta}$ mènerait au même résultat par les relations du numéro précédent.

IX. *Des cylindres elliptiques ou hyperboliques.*

L'équation générale

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$$
$$+ 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = o$$

représente un cylindre elliptique ou hyperbolique, lorsque l'on a

$$B''^2 - AA' \gtrless o,$$

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = o \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = o.$$

Si nous prenons pour origine un centre (α, β, γ), l'équation devient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz$$
$$+ 2B'xz + 2B''xy + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D = o.$$

Les coordonnées α, β, γ satisfont aux équations

$$A\alpha + B''\beta + B'\gamma + C = o,$$
$$B''\alpha + A'\beta + B\gamma + C' = o,$$
$$B'\alpha + B\beta + A''\gamma + C'' = o,$$

dont les deux premières donnent

$$\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} B'\gamma + C & B'' \\ B\gamma + C' & A' \end{vmatrix}}{AA' - B''^2},$$

$$\beta = -\frac{\begin{vmatrix} A & B'\gamma + C \\ B'' & B\gamma + C \end{vmatrix}}{AA' - B''^2}.$$

Il en résulte

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D$$

$$= \frac{C\begin{vmatrix} B'' & B'\gamma+C \\ A' & B\gamma+C' \end{vmatrix} - C'\begin{vmatrix} A & B'\gamma+C \\ B'' & B\gamma+C' \end{vmatrix} + (C''\gamma + D)\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}}{AA' - B''^2}$$

$$= \frac{\gamma\left\{C\begin{vmatrix} B'' & B' \\ A' & B \end{vmatrix} - C'\begin{vmatrix} A & B' \\ B'' & B \end{vmatrix} + C''\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}\right\}}{AA' - B''^2}$$

$$+ \frac{C\begin{vmatrix} B'' & C \\ A' & C' \end{vmatrix} - C'\begin{vmatrix} A & C \\ B'' & C' \end{vmatrix} + D\begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}}{AA' - B''^2}.$$

Le coefficient de γ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix};$$

il est donc nul.

D'ailleurs, l'autre terme est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix}.$$

Donc

$$C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D = \frac{\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix}}{AA' - B''^2} = \frac{L_1}{\Delta_1},$$

en posant

$$L_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_1 = AA' - B''^2.$$

Ainsi l'équation de la surface rapportée au centre est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0$$

Soit

$$aX^2 + a'Y^2 + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0$$

l'équation aux axes correspondante.

Nos relations fondamentales donneront ici

$$\frac{M}{1} = \frac{N}{a + a'} = \frac{P}{-aa'}.$$

Donc, si u et v désignent les carrés des demi-axes déterminés par les équations

$$au + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0, \quad a'v + \frac{L_1}{\Delta_1} = 0,$$

ces relations deviennent

$$\frac{M}{1} = \frac{N}{-\frac{L_1}{\Delta_1}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)} = \frac{P}{-\frac{L_1^2}{\Delta_1^2}\frac{1}{uv}},$$

d'où

$$uv = -\frac{M}{P}\frac{L_1^2}{\Delta_1^2}, \quad u + v = \frac{N}{P}\frac{L_1}{\Delta_1}.$$

Donc u et v seront les racines de l'équation

$$V^2 - \frac{N}{P}\frac{L_1}{\Delta_1}V - \frac{M}{P}\frac{L_1^2}{\Delta_1^2} = 0.$$

Soit considéré un second cylindre ayant pour équation

$$\begin{aligned} &ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz \\ &+ 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0 \end{aligned}$$

par rapport à des axes faisant entre eux les angles φ, ψ, ω.

En supposant

$$b''^2 - aa' \gtrless 0,$$

les deux cylindres sont égaux si l'on a

$$\frac{L_1}{\Delta_1}\frac{N}{P}=\frac{l_1}{\delta_1}\frac{n}{p}$$

et

$$\frac{L_1^2}{\Delta_1^2}\frac{M}{P}=\frac{l_1^2}{\delta_1^2}\frac{m}{p}:$$

conditions que l'on peut mettre sous l'une de ces deux formes

$$\frac{\Delta_1}{\delta_1}=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\cdot\frac{p}{P}=\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{L_1}{l_1}=\frac{\Delta_1}{\delta_1}\frac{P}{p}\cdot\frac{n}{N}=\frac{\Delta_1}{\delta_1}\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

X. Les deux cylindres, au lieu d'être égaux, seront semblables si l'on a

$$\frac{n}{p}\frac{l_1}{\delta_1}K=\frac{N}{P}\frac{L_1}{\Delta_1},$$

$$\frac{m}{p}\frac{l_1^2}{\delta_1^2}K^2=\frac{M}{P}\frac{L_1^2}{\Delta_1^2},$$

d'où

$$K=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\frac{p}{P}\frac{\delta_1}{\Delta_1}=\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\delta_1}{\Delta_1},$$

ce qui donne

$$\left(\frac{N}{n}\right)^2=\frac{M}{m}\frac{P}{p}.$$

XI. Les deux cylindres deviennent chacun le système de deux plans, si l'on a

$$L_1=0,\quad l_1=0;$$

alors la condition d'égalité devient

$$\left(\frac{P}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{n}{N}=\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{P}{p}\cdot\frac{M}{m}=\left(\frac{N}{n}\right)^2,$$

résultat aisé à vérifier.

XII. *Cylindres paraboliques.*

Si l'équation

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2\\+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0\end{gathered}$$

représente un cylindre parabolique, les termes du second degré y forment un carré parfait.

Alors

$$\begin{aligned}B^2-A'A''&=0, & AB-B'B''&=0,\\B'^2-A''A&=0, & A'B'-B''B&=0,\\B''^2-AA'&=0, & A''B''-BB'&=0;\end{aligned}$$

d'où il suit que $P=0$, $\Delta_1=0$, et L est indépendant de D.

Les relations trouvées pour deux cylindres elliptiques ou hyperboliques sont satisfaites par là même. Elles ne donnent rien à l'égard des cylindres paraboliques, à moins qu'on n'en déduise une nouvelle relation qui ne devienne pas illusoire par les égalités qui viennent d'être écrites. C'est ce que nous allons faire au moyen de l'analyse suivante.

Les conditions générales d'égalité pour deux cylindres sont

$$\frac{\Delta_1}{\delta_1}=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\frac{p}{P}=\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Elles donnent

$$\left(\frac{\Delta_1}{\delta_1}\right)^2=\frac{L_1}{l_1}\frac{N}{n}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)\left(\frac{p}{\delta_1}\right)$$

et

$$\left(\frac{\Delta_1}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{L_1}{l_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L_1}{l_1}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ou bien

$$\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{P}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{p}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{L_1}{l_1}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ou

$$\left(\frac{N}{n}\right)^{3}\frac{\Delta_1}{P}\frac{p}{\delta_1} = \frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{2};$$

ce qui fait

$$\left(\frac{N}{n}\right)^{3} = \frac{H}{h}\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^{2},$$

en posant

$$H = \frac{P}{\Delta_1}, \quad h = \frac{p}{\delta_1}.$$

Expression de H. — La surface étant un cylindre, on a les équations

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} C & B'' & B' \\ C' & A' & B \\ C'' & B & A'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A & C & B' \\ B'' & C' & B \\ B' & C'' & A'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

En faisant

$$AB - B'B'' = \varepsilon, \quad A'B' - B''B = \varepsilon', \quad A''B'' - BB' = \varepsilon'',$$

la première donne tour à tour

$$A\,(A'A''-B^2)-B'\varepsilon'-B''\varepsilon''=0,$$
$$A'(A''A-B'^2)-B''\varepsilon''-B\,\varepsilon=0,$$
$$A''(AA'-B''^2)-B\,\varepsilon-B'\varepsilon'=0.$$

Les autres donnent

$$(i)\quad\begin{cases} C\,(A'A''-B^2)-C'\varepsilon''-C''\varepsilon'=0,\\ C'(A''A-B'^2)-C''\varepsilon-C\varepsilon''=0,\\ C''(AA'-B''^2)-C\varepsilon'-C'\varepsilon=0.\end{cases}$$

Par l'élimination de $AA'-B''^2$, on obtient

$$(A''C'-BC'')\varepsilon+(A''C-B'C'')\varepsilon'=0;$$

on aura de même

$$(AC''-B'C)\varepsilon'+(AC'-B''C)\varepsilon''=0,$$
$$(A'C-B''C')\varepsilon''+(A'C''-BC')\varepsilon=0;$$

de sorte que

$$\varepsilon'=-\frac{A''C'-BC''}{A''C-B'C''}\varepsilon,\quad \varepsilon''=-\frac{A'C''-BC'}{A'C-B''C'}\varepsilon.$$

Substituons dans H les valeurs que fournissent les équations (i) pour $A'A''-B^2$, $A''A-B'^2$, $AA'-B''^2$, et ces valeurs de ε' et de ε''. Nous aurons

$$H=\frac{\begin{array}{l}C\,(C'^2+C''^2-2C'C''\cos\Phi)(A'C-B''C')(A''C-B'C'')\\ -C'(C''^2+C^2-2C''C\cos\Psi)(A''C'-BC'')(A'C-B''C')\\ -C''(C^2+C'^2-2CC'\cos\Omega)(A'C''-BC')(A''C-B'C'')\end{array}}{CC'C''(A'C-B''C')(BC-B'C')}.$$

Voilà une expression de H applicable à tout cylindre elliptique ou hyperbolique.

Au cas d'un cylindre parabolique, comme $B=\sqrt{A'A''}$,

$B' = \sqrt{A''A}$, $B'' = \sqrt{AA'}$, nous aurons

$$A'C - B''C' = \sqrt{A'}(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}),$$
$$A''C' - BC'' = \sqrt{A''}(C'\sqrt{A''} - C''\sqrt{A'}),$$
$$A''C - B'C'' = \sqrt{A''}(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A}),$$
$$A'C - B''C' = \sqrt{A'}(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}),$$
$$A'C'' - BC' = \sqrt{A'}(C''\sqrt{A'} - C'\sqrt{A''}),$$
$$A''C - B'C'' = \sqrt{A''}(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A}),$$

puis

$$BC - B'C' = \sqrt{A''}(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}).$$

Au moyen de ces expressions, H devient

$$H = \frac{\begin{matrix} C(C'^2 + C''^2 - 2C'C''\cos\Phi)(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A}) \\ + C'(C''^2 + C^2 - 2C''C\cos\Psi)(C'\sqrt{A''} - C''\sqrt{A'})(C'\sqrt{A} - C\sqrt{A'}) \\ + C''(C^2 + C'^2 - 2CC'\cos\Omega)(C''\sqrt{A} - C\sqrt{A''})(C''\sqrt{A'} - C'\sqrt{A''}) \end{matrix}}{CC'C''(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})^2},$$

$$H = \frac{\begin{matrix} A(C'^2 + C''^2) - 2C'C''\sqrt{A'A''} + A'(C''^2 + C^2) \\ - 2C''C\sqrt{A''A} + A''(C^2 + C'^2) - 2CC'\sqrt{AA'} \\ - 2(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})(C\sqrt{A''} - C''\sqrt{A})\cos\Phi \\ - 2(C'\sqrt{A''} - C''\sqrt{A'})(C'\sqrt{A} - C\sqrt{A'})\cos\Psi \\ - 2(C''\sqrt{A} - C\sqrt{A''})(C''\sqrt{A'} - C'\sqrt{A''})\cos\Omega \end{matrix}}{(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})^2}.$$

Pour $A'' = 0$, cette valeur de H se réduit à

$$H = \frac{\begin{matrix} (C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})^2 + C''^2(A + A') \\ + 2C''\sqrt{A}(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})\cos\Phi \\ + 2C''\sqrt{A'}(C'\sqrt{A} - C\sqrt{A'})\cos\Psi - 2C''^2\sqrt{AA'}\cos\Omega \end{matrix}}{(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})^2},$$

$$H = \frac{\begin{matrix} (C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})^2 + C''^2(A + A') + 2C''(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A}) \\ \times(\sqrt{A}\cos\Phi - \sqrt{A'}\cos\Psi) + C''^2(A + A' - 2\sqrt{AA'}\cos\Omega) \end{matrix}}{(C\sqrt{A'} - C'\sqrt{A})^2}.$$

Si, en outre, $A' = o$,

$$H = \frac{C'^2 + C''^2 - 2C'C''\cos\Phi}{C'^2}.$$

Si on avait $A'' = o$, $A = o$, on aurait

$$H = \frac{C^2 + C''^2 - 2CC''\cos\Psi}{C^2},$$

Autre expression de H *au cas du cylindre parabolique.* — Les équations

$$AB - B'B'' = \varepsilon,$$
$$A'B' - B''B = \varepsilon',$$
$$A''B'' - BB' = \varepsilon''$$

donnent

$$A = \frac{B'B''}{B} + \frac{\varepsilon}{B}, \quad A' = \frac{B''B}{B'} + \frac{\varepsilon'}{B'}, \quad A'' = \frac{BB'}{B''} + \frac{\varepsilon''}{B''},$$

d'où l'on tire

$$A'A'' - B^2 = \frac{B}{B''}\varepsilon' + \frac{B}{B'}\varepsilon'' + \frac{\varepsilon'\varepsilon''}{B'B''},$$
$$A''A - B'^2 = \frac{B'}{B}\varepsilon'' + \frac{B'}{B''}\varepsilon + \frac{\varepsilon''\varepsilon}{B''B},$$
$$AA' - B''^2 = \frac{B''}{B'}\varepsilon + \frac{B''}{B}\varepsilon' + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{BB'}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans la première expression de H, en mettant à la place de ε' et de ε'' leurs valeurs en ε, puis si l'on fait $\varepsilon = o$, on trouve

$$H = \frac{\begin{array}{l} B\,(B''^2 + B'^2 - 2B'B''\cos\Phi)(A''C - B'C'')(A'C - B''C') \\ - B'(B''^2 + B^2 - 2BB''\cos\Psi)(A''C' - BC'')(A'C - B''C') \\ - B''(B^2 + B'^2 - 2BB'\cos\Omega)(A'C'' - BC')(A''C - B'C'') \end{array}}{B''^2A''(BC - B'C')(A'C - B''C')};$$

d'où, à cause de $A = \frac{B'B''}{B}$, $A' = \frac{B''B}{B'}$, $A'' = \frac{BB'}{B''}$,

$$H = \frac{\begin{array}{l}(B'^2 + B''^2 - 2B'B''\cos\Phi)(BC - B'C')(BC - B''C'') \\ +(B''^2 + B^2 - 2B''B\cos\Psi)(B'C' - B''C'')(B'C' - BC) \\ +(B^2 + B'^2 - 2BB'\cos\Omega)(B''C'' - BC)(B''C'' - B'C')\end{array}}{B''^2(BC - B'C')^2}.$$

Quand on élimine B, B' et B'' de cette formule, on retombe bien sur l'expression de H précédemment établie.

La condition d'égalité pour deux cylindres paraboliques sera la formule

$$\left(\frac{N}{n}\right)^3 = \frac{H}{h}\frac{L_1}{l_1}\left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

en y employant la valeur de H trouvée ci-dessus, et en attribuant à h une valeur analogue.

Soit

$$y^2 - 2qx = 0$$

la seconde des équations données pour les deux cylindres.

Alors

$$n = \sin^2\psi,$$

$$l_1 = \begin{vmatrix} a & b'' & c \\ b'' & a' & c' \\ c & c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -q \\ 0 & 1 & 0 \\ -q & 0 & d \end{vmatrix} = -q^2,$$

$$h = \frac{c^2 + c''^2 - 2cc''\cos\psi}{c^2} = 1.$$

Donc

$$\frac{N^3}{\sin^6\psi}\frac{1}{H} = \frac{L_1}{-q^2}\left(\frac{M}{m}\right)^2,$$

$$q^2 = -\frac{L_1 H}{N^3}\left(\frac{M}{m}\right)^2\sin^6\psi,$$

$$q = \left(-\frac{L_1 H}{N^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{M}{m}\sin^3\psi.$$

Si l'équation se rapporte à des axes rectangulaires, et qu'elle soit $y^2 - 2Qx = 0$,

$$Q = \left(-\frac{L_1 H}{N^3}\right)^{\frac{1}{2}} M.$$

De là on conclut que

$$q = Q\frac{\sin^3\psi}{m} = Q\frac{\sin^3\psi}{1 - \cos^2\varphi - \cos^2\psi - \cos^2\omega + 2\cos\varphi\cos\psi\cos\omega}.$$

Au cas de $\omega = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$, c'est

$$q = Q\sin\psi.$$

SUR LES RAYONS DE COURBURE DES CAUSTIQUES EN LEURS POINTS DE REBROUSSEMENT;

Par M. BRETON (de Champ),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Les instruments destinés soit à augmenter la puissance de la vision, soit à former les images que fixe l'art du photographe, se composent essentiellement, au moins dans leur partie principale, de surfaces sphériques réfringentes ou réfléchissantes, centrées sur un même axe. Si l'on conçoit que des rayons de lumière homogène partent d'un point situé sur cet axe, ils formeront, dans chaque section diamétrale, une caustique due à l'action de la première surface, puis une seconde caustique due à l'action des deux premières surfaces, et ainsi de suite; et chacune de ces caustiques aura sur l'axe central un point de rebroussement de première espèce.

Or, en un tel point, le rayon de courbure d'une courbe est ou infini ou nul (*). Par exemple, la courbe qui a pour équation en coordonnées rectangulaires

$$y^2 = x^5$$

présente, à l'origine, un point de rebroussement de première espèce, pour lequel le rayon de courbure est infini. Il en est de même pour toutes les courbes qui ont pour équation

$$y^2 = x^{4+\varepsilon},$$

ε étant positif, et tel que $(-x)^\varepsilon$ soit négatif.

En prenant

$$y^2 = x^3,$$

ou plus généralement

$$y^2 = x^{4-\varepsilon},$$

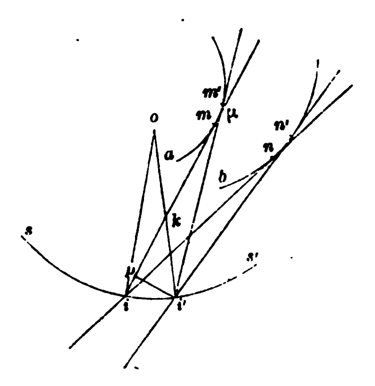
sous les mêmes conditions que ci-dessus, mais en ajoutant cette restriction que ε soit < 2, on a des courbes à point de rebroussement de première espèce pour lesquelles le rayon de courbure est nul.

Il est intéressant d'examiner ce qui a lieu pour les points de rebroussement des caustiques successives que nous considérons ici. On conçoit en effet que si le rayon de courbure est nul, la courbe, s'écartant alors de l'axe très-rapidement, est bien plus favorable à la concentration des rayons dans un petit espace autour du point de rebroussement qui constitue le foyer.

Supposons que *am*, *bn* soient deux caustiques consé-

(*) *Voyez* à ce sujet un article inséré au tome XIII du présent journal, p. 127. M. Bertrand a omis dans le *Calcul différentiel* qu'il vient de publier les points de rebroussement de première espèce à rayon de courbure infini. C'est du moins ce qui semble résulter des §§ 501 et 502 de cet ouvrage, et surtout de la table analytique au mot *Rebroussement*.

cutives, c'est-à-dire que tout rayon *mi* tangent à *am* prenne, après avoir subi l'action de la surface *ss'*, la direc-



tion *ni* tangente à *bn*. Du point *i* menons une normale *io* à la surface *ss'*; si l'on appelle V, V' les angles d'incidence et de réfraction *oim*, *oin*, et $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda'}$ les indices de réfraction propres aux deux milieux dans lesquels la lumière se propage successivement, on aura la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda}\sin V = \frac{1}{\lambda'}\sin V'.$$

Dans le cas de la réflexion, on aurait $\lambda' = -\lambda$.

Soit *i'* un nouveau point d'incidence voisin de *i*, *m'i'* le rayon tangent à la première caustique, *n'i'* le rayon tangent à la seconde, et *i'o* la normale. On aura

$$oi'm' = V + dV, \quad oi'n' = V' + dV',$$

et en différentiant la relation (1)

$$(2) \qquad \frac{1}{\lambda}\cos V\,dV = \frac{1}{\lambda'}\cos V'\,dV'.$$

Nommons encore r, Δ, Δ' les longueurs *oi*, *mi*, *ni*. Le point *o* étant l'intersection de deux normales *io*, *i'o* menées par les points *i*, *i'* distants de l'intervalle très-petit *ds*,

r est le rayon de courbure de cet arc, et on a $ioi' = \frac{ds}{r}$. Soit μ le point d'intersection des rayons mi, $m'i$, l'égalité entre la somme des angles du triangle oki et la somme des angles du triangle $\mu k i'$ donne

$$dV = \frac{ds}{r} - k\mu i'.$$

Or, si l'on abaisse $i'p$ perpendiculaire sur $i\mu$, on a

$$k\mu i' = \frac{ip}{p\mu} = \frac{ds \cos V}{\Delta},$$

et par suite

(3) $$dV = \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos V}{\Delta}\right) ds.$$

On trouverait de même

(4) $$dV' = \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos V'}{\Delta'}\right) ds;$$

substituant ces expressions dans (2), il vient

(5) $$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos^2 V}{\Delta} - \frac{\cos V}{r}\right) = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{\cos^2 V'}{\Delta'} - \frac{\cos V'}{r}\right);$$

formule donnée par Jacques Bernoulli.

Appelons actuellement R, R' les rayons de courbure des petits arcs mm', nn' des deux caustiques. On a

$$mm' = ip + pm' - im,$$

et à cause de la petitesse de l'angle $i\mu i'$, on peut regarder $i'm'$ comme égal à pm'. Par conséquent,

$$mm' = ds.\sin V + d\Delta.$$

En divisant mm' par R, on a la valeur de l'angle de contingence $i\mu i'$ ou $k\mu i'$ déjà exprimé ci-dessus. De là ré-

sulte l'égalité

$$(6)\qquad \frac{ds \sin V + d\Delta}{R} = \frac{ds \cos V}{\Delta},$$

d'où l'on tire

$$(7)\qquad d\Delta = \left(\frac{R \cos V}{\Delta} - \sin V\right) ds.$$

On trouve de même

$$(8)\qquad d\Delta' = \left(\frac{R' \cos V'}{\Delta} - \sin V'\right) ds.$$

Or l'équation (5) donne

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{r}\sin V dV - \frac{2}{\Delta}\sin V \cos V dV - \frac{1}{\Delta^2}\cos^2 V d\Delta\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{1}{r}\sin V' dV' - \frac{2}{\Delta'}\sin V' \cos V' dV' - \frac{1}{\Delta'^2}\cos^2 V' d\Delta'\right),$$

et, en mettant pour dV, dV', $d\Delta$, $d\Delta'$ les expressions ci-dessus (3), (4), (7), (8), il vient, après une simplification facile,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{3}{\lambda}\frac{\sin V}{\Delta}\left(\frac{\cos^2 V}{\Delta} - \frac{\cos V}{r}\right) - \frac{1}{\lambda}\frac{\cos^3 V}{\Delta^3} R \\ &= \frac{3}{\lambda'}\frac{\sin V'}{\Delta'}\left(\frac{\cos^2 V'}{\Delta'} - \frac{\cos V'}{r}\right) - \frac{1}{\lambda'}\frac{\cos^3 V'}{\Delta'^3} R'. \end{aligned}\right.$$

Telle est la relation qui existe généralement entre les rayons de courbure R, R' aux points correspondants *m*, *n* de deux caustiques consécutives.

Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur la position des caustiques. Dans le cas spécial que nous avons en vue, les rayons *mi*, *ni* sont normaux à la surface *ss'*; par conséquent on a $V = 0$, $V' = 0$, et la relation ci-dessus devient

$$(10)\qquad \frac{1}{\lambda\Delta^3} R = \frac{1}{\lambda'\Delta'^3} R'.$$

Or, au point de départ on a $R = 0$, puisque les rayons sont censés diverger de ce point; on a donc $R' = 0$ pour le point de rebroussement de la première caustique. Ayant $R' = 0$, le rayon de courbure au point de rebroussement de la seconde caustique se réduira pareillement à zéro, et ainsi de suite. D'où résulte cette conséquence très-importante, que tous les rayons de courbure dont il s'agit sont nuls.

Le rayon de courbure en un point de rebroussement d'une caustique est encore généralement nul lorsque les rayons de lumière ne sont pas normaux à la surface qui les réfracte ou les réfléchit. En effet, pour qu'il y ait rebroussement, il faut que nn' change de signe, c'est-à-dire que $ds \sin V' + d\Delta'$ se réduise à zéro. Or

$$(11) \qquad \frac{ds \sin V' + d\Delta'}{R'} = \frac{ds \cos V'}{\Delta'},$$

par conséquent

$$(12) \qquad ds \sin V' + d\Delta' = \frac{ds \cos V'}{\Delta'} \cdot R'.$$

Le premier membre de cette égalité ne peut, *en général*, se réduire à zéro sans que l'on ait $R' = 0$, ce qui démontre le théorème énoncé.

SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;

PAR M. J. MENTION.

L'hyperbole équilatère est encore un bon sujet d'étude, même après les recherches souvent citées de MM. Brianchon et Poncelet, après celles, moins connues, de Bobillier (*Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 349). J'ai trouvé

naguère, par exemple, que toutes les courbes de cette espèce, assujetties à toucher les côtés d'un triangle, ont leurs centres sur le *cercle des hauteurs* du triangle, c'est-à-dire le cercle décrit du point de rencontre des hauteurs comme centre, avec un rayon moyen proportionnel entre les segments dans lesquels chaque hauteur est divisée au point de rencontre. Il est clair, maintenant, que le centre d'une hyperbole équilatère, dont trois tangentes et un point de contact sont donnés, se trouverait à l'intersection du cercle des hauteurs avec la droite passant : 1° par le milieu du côté du triangle circonscrit, qui renferme le point de contact assigné; 2° par le milieu de la droite allant de ce point au sommet opposé.

Je lis pourtant dans le tome I[er] des *Nouvelles Annales*, p. 426, que « le centre de cette hyperbole est sur une circonférence passant par le point du contact, par le milieu du côté sur lequel est ce point, et par le sommet opposé à ce côté. »

Cela ne fournirait jamais qu'une seule solution, et la fournirait toujours.

La proposition extraite paraît être mise hors de doute par une Note du Rédacteur où il s'engage à *donner prochainement les énoncés renfermés dans les Mémoires cités*. Le Rédacteur n'ayant pas tenu cette promesse, je me suis demandé quel était l'auteur de la proposition en litige, car elle n'appartient ni à Brianchon et Poncelet, ni à Bobillier. Je la jugeais difficile à démontrer, jusqu'au moment où je la jugeai impossible, puisqu'elle est fausse. Je ne parlerais point de cette inadvertance qui s'est glissée dans un travail recommandable, si la page suivante du même travail ne contenait une seconde proposition plus manifestement fausse, portant, en substance, que toutes les hyperboles équilatères passant par un point, et touchant deux droites données, ont leurs centres sur une

circonférence. D'ailleurs, il est facile de reconnaître que ces propositions sont incompatibles. La première étant admise, le dernier lieu géométrique serait une courbe du quatrième degré, issue, par rayons vecteurs réciproques, de l'hyperbole à laquelle appartiennent les milieux des sécantes comprises entre les tangentes et passant par le point fixe.

Au surplus, je vais résoudre encore autrement le problème qui a entraîné cette double méprise.

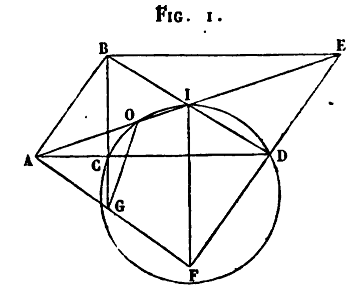
I.

Théorème. — *Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère, touchant une droite fixe en un point donné, et passant par un second point, est une circonférence.*

Ire Démonstration. — On sait que le cercle des neuf points d'un triangle inscrit à l'hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe. Si deux des sommets du triangle se confondent, trois des neuf points subsistent, savoir : le point de contact, le milieu du côté restant, et le pied de la perpendiculaire abaissée du troisième sommet sur la tangente.

IIe Démonstration. — La corde BD (*fig.* 1) de l'hy-

Fig. 1.



perbole équilatère est vue du centre O sous un angle supplémentaire de celui des tangentes AB, AD; ce centre

sera donc à la fois sur la diagonale AE du parallélogramme ABDE et sur la circonférence qui passerait par les trois points B, D, E. Mais alors $OI.IE = \overline{BI}^2$; ainsi le lieu des points o sera la circonférence réciproque de la droite DE, parallèle à la tangente fixe AB, par rapport au pôle I et à la constante BI.

Théorème. — *Le lieu du centre d'une hyperbole équilatère touchant deux droites, dont l'une en un point donné, est une circonférence qui touche, au point de concours des tangentes, celle dont le point de contact est assigné, et ayant son centre sur la perpendiculaire abaissée de celui-ci sur la seconde tangente.*

Démonstration. — Soient (*fig.* 1) AB, AD les tangentes et B le point de contact fixe. Considérons un point de contact variable, D. Le centre de l'hyperbole correspondante sera à l'intersection de la droite AI qui passe par le milieu de BD, avec le cercle passant par les points I, D et C; C étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur AD. J'élève AF perpendiculaire à AB, et je construis le parallélogramme ABDE. L'angle AFD étant droit, on aura

$$AG.AF = AC.AD = Ao.AI;$$

ainsi les quatre points O, I, G, F sont sur une même circonférence. Donc

$$\frac{OG}{IF} = \frac{AG}{AI},$$

mais

$$AI = IF,$$

par conséquent

$$OG = AG,$$

c'est-à-dire que le point O appartient à un cercle ayant le point G pour centre et AG pour rayon. C. Q. F. D.

Corollaire. — Le centre de l'hyperbole touchant trois droites, avec un point de contact donné, sera situé à l'intersection de deux circonférences ayant pour axe radical la droite des milieux dénommée ci-dessus.

Remarque. — Un triangle acutangle ne saurait être circonscrit à l'hyperbole équilatère ; car, prenant un point de contact sur un des côtés, on aurait pour déterminer le centre, en vertu de ce qui précède, deux cercles qui ne se couperaient pas. Pour un triangle obtusangle, les points de contact pourront être sur les prolongements des côtés de l'angle obtus ou sur la base même.

II.

Comment prouver, sans calcul, que toutes les hyperboles équilatères, inscrites à un triangle, ont leurs centres sur son *cercle des hauteurs?* Prenons d'abord deux tangentes et une asymptote. J'observerai que, si les côtés non parallèles d'un trapèze sont à angle droit, les points de rencontre des hauteurs des deux triangles formés respectivement avec les diagonales et les côtés non parallèles sont, avec le sommet de l'angle droit, sur une ligne perpendiculaire à celle qui joint les milieux des côtés non parallèles. Cette propriété découle immédiatement du théorème sur la ligne des hauteurs dans le quadrilatère, mais on peut l'établir directement.

Soit ABCD (*fig.* 2) un trapèze satisfaisant aux conditions requises. Prouvons que le point de rencontre H des hauteurs du triangle ACI forme, avec le point de rencontre des diagonales, l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant O pour sommet de l'angle droit. Cela revient à faire voir que le quadrilatère PHOI est inscriptible, ou que

$$POI = PHI.$$

Or

$$POI = POB - IOB = PAB - IOB$$

et

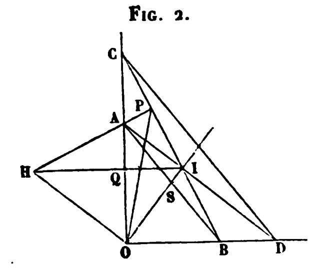
$$PHI = 1\ dr - IBO.$$

Il faut donc que

$$PAB + IBS = 1\ dr,$$

S milieu de AB; ce qui est évident. Donc, en décrivant

FIG. 2.



sur IH comme diamètre une circonférence, elle coupera l'asymptote au centre O de la courbe.

Corollaire. — On a

$$HQ.HI = \overline{OH}^2,$$

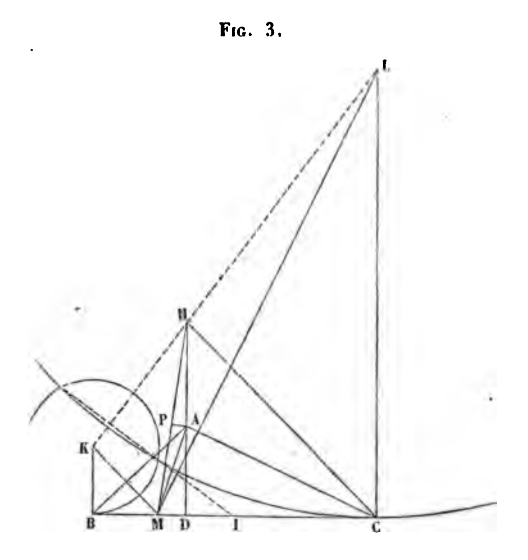
c'est-à-dire que le point O appartient aussi à la circonférence des hauteurs du triangle ACI; en d'autres termes : *Le centre d'une hyperbole équilatère tangente à deux droites est situé sur la circonférence des hauteurs relative au triangle formé par ces deux tangentes et une asymptote.*

A présent, les cercles des hauteurs relatifs aux quatre triangles du quadrilatère, ayant par côtés trois tangentes et une asymptote, ont même axe radical, *parce qu'il s'agit de triangles obtusangles.* Or, trois d'entre eux renferment le centre de l'hyperbole équilatère, qui sera par conséquent sur le quatrième.

A cette démonstration géométrique je joindrai la suivante.

Choisissons un point de contact M (*fig.* 3), sur le côté BC opposé à l'angle obtus A. Je dis que les cercles K, L, déterminés d'après le second théorème du § I, ont un même axe radical avec le cercle des hauteurs. En effet, le point M a pour polaires par rapport à ces cercles les côtés AB, AC; donc le milieu de AM est sur leur axe radical, d'après un théorème très-connu.

FIG. 3.



Le milieu I de la base fait également partie de cet axe. Si l'on mène AP perpendiculairement à MH, évidemment MH.HP = AH.HD ou le carré du rayon du cercle H; donc AP est la polaire du point M par rapport à ce cercle, et le milieu de AM appartient encore à l'axe radical des cercles K et H. Enfin, le cercle décrit sur BC comme diamètre, étant orthogonal à la fois aux cercles K et H, sera pareillement sur leur axe radical.... Les deux cercles variables K et L se couperont par suite sur le cercle des hauteurs. C. Q. F. D.

Les trois centres K, H, L restent en ligne droite dans le triangle acutangle, quoique les cercles n'aient plus le même axe radical. La preuve de ce fait n'offre aucune difficulté.

III.

Les considérations actuelles ayant de l'importance par l'extension qu'elles reçoivent dans les surfaces du second ordre, ainsi que je le montrerai prochainement, je résoudrai ce problème plus général :

Trouver le lieu géométrique des centres des coniques touchant deux droites, dont l'une en un point donné, et telles, que la somme algébrique des carrés de leurs axes soit connue.

Solution. — Soit, par exemple, O le centre d'une ellipse inscrite à un angle A, on obtient facilement cette équation :

$$a^2 + b^2 = \overline{AO}^2 - 2aK\cot A,$$

où a et b représentent les demi-axes et K le rayon focal relatif au sommet de l'angle, je veux dire la distance de ce sommet aux quatre rayons vecteurs de contact.

En effet, le triangle qui a pour côtés $2a$, AF, AF′ en longueurs donne

$$4a^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AF'}^2 - 2AF.AF'\cos A$$
$$= 2\overline{MO}^2 + 2c^2 - 2AF.AF'\cos A,$$

ou

$$a^2 + b^2 = \overline{AO}^2 - AF.AF'\cos A.$$

Mais AF.AF′ sin A et $2aK$ mesurent le double de la surface du triangle AFF′, ; donc

$$a^2 + b^2 = \overline{AO}^2 - 2aK\cot A.$$

D'autre part, la surface du triangle formé par le sommet de l'angle, le centre et l'un des points de contact s'exprime évidemment par $\frac{a\mathrm{K}}{2}$; de sorte que α désignant la portion de tangente donnée, et l la distance du centre à cette tangente, on aura

$$a^2+b^2=\overline{\mathrm{AO}}^2-2l\alpha\cot\mathrm{A},$$

équation d'un cercle dont le centre ne dépend nullement du carré a^2+b^2. C'est le même point que pour l'hyperbole équilatère.

Ajoutons une troisième tangente, le point de contact demeurant invariable; à chaque valeur du carré correspondra, pour déterminer le centre de la conique, une couple de cercles ayant pour axe radical la droite allant du milieu de la portion de tangente interceptée entre les tangentes à contact arbitraire, au milieu de la distance entre le point de contact et le sommet opposé du triangle circonscrit. En outre, ces deux cercles auront même axe radical avec un cercle ayant son centre au point de rencontre des hauteurs et un rayon variable avec le carré donné. Donc, *toutes les coniques inscrites à un triangle, et ayant la même somme algébrique des carrés de leurs axes, ont leurs centres sur un cercle concentrique au cercle des hauteurs.*

Remarque. — La ligne des centres passe par le point de rencontre des hauteurs, perpendiculairement au diamètre de la parabole inscrite au triangle et touchant la base en un point donné : elle sera donc la directrice de cette parabole. D'où ce théorème :

Par le sommet d'un angle circonscrit à la parabole, on élève une perpendiculaire à l'un des côtés, et du point de contact de celui-ci on en abaisse une sur le se-

cond côté. Ces deux perpendiculaires se coupent sur la directrice.

Note. — Dans l'article inséré au tome précédent, page 535, il faut lire « même puissance respective » au lieu de « la même puissance en valeur absolue » ; et, page 536, il est nécessaire que le *triangle circonscrit à une conique* soit obtusangle.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 715

(voir 2e série, t. III, p. 445);

PAR M. GILLIOT,
Élève du lycée de Strasbourg.

Le lieu des foyers des paraboles normales à une droite et qui la coupent en deux points fixes, est une cissoïde. (MENTION.)

Je prends pour axe des x la droite donnée, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, menée par le point où la première est normale à la parabole. Si (α, β) désignent les coordonnées d'un foyer quelconque, l'équation d'une parabole satisfaisant à ces conditions pourra être mise sous la forme

$$(1 - m^2)x^2 - 2mnxy + (1 - n^2)y^2$$
$$- 2(\alpha + mp)x - 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0,$$

pourvu que les relations suivantes soient vérifiées :

$$(1) \qquad m^2 + n^2 = 1,$$

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \beta + np = 0.$$

La première de ces équations exprime que la courbe est une parabole, et les deux autres assujettissent la parabole à toucher à l'origine l'axe des y.

Soit maintenant a l'abscisse du point où la parabole doit rencontrer encore l'axe des x; j'aurai, en exprimant que les coordonnées (a, o) vérifient l'équation de la parabole, une quatrième relation entre les paramètres m, n, p, et les coordonnées α, β d'un point du lieu :

$$(4) \qquad a(1 - m^2) - 2(\alpha + mp) = 0.$$

J'aurai donc l'équation du lieu cherché en éliminant les paramètres m, n, p entre ces quatre relations. Des trois premières, je tire

$$p^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad n^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad m^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

La relation (4) devient alors

$$a \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - 4\alpha = 0.$$

En remplaçant α et β par x et y, nous aurons pour équation du lieu

$$y^2 = \frac{4x^3}{a - 4x},$$

ou encore

$$y^2 = \frac{x^3}{\frac{a}{4} - x}.$$

Sous cette forme, on reconnaît une cissoïde dont le diamètre du cercle générateur est $\frac{a}{4}$ et dont l'asymptote a pour équation $x = \frac{a}{4}$.

Note. — Autres solutions analytiques de MM. Audoynaud, professeur au lycée de Poitiers; Lacauchie, élève de Sainte-Barbe (classe de M. Mou-

tard); Bertrand et Grassat, élèves du lycée de Lyon; Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans; E. Dubois et L. Masquelier, Delory, élèves du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser); Alphonse Aubrun, Georges Glasser, Ed. Widemann, élèves du lycée de Strasbourg; Albert Ribeaucourt, élève du lycée de Lille; Eugène Margot, du lycée de Grenoble; Smith junior, élève du lycée Louis-le-Grand; Louis Pabon, élève du lycée de Bordeaux.

Même question;

PAR M. DURGET,
Élève du lycée de Besançon.

Je suppose que l'on ait tracé la tangente correspondant à la normale fixe AB, de même qu'une seconde tangente perpendiculaire à la première en T. La corde des contacts de ce système rectangulaire passe par le foyer de la parabole. Achevons alors le rectangle en menant par le point de contact A' de la seconde tangente une perpendiculaire à la normale, puis, du point T et de son opposé T', abaissons des perpendiculaires TF, T'R sur la corde des contacts. Enfin traçons le cercle qui a pour diamètre AT' et qui passe en R. On sait que la ligne TF passe par le foyer, et que AT' est constant et égal au quart de AB; d'ailleurs il est évident que RA' = FA.

Ainsi cette génération, à l'aide d'une parabole, revient à la génération connue de la cissoïde, à l'aide d'une droite et d'un cercle.

Note. — Autres solutions géométriques de MM. Thürninger, élève du lycée Saint-Louis; Vieira et Jamin, élèves de l'École Polytechnique; Gazères et La Rougery, élèves du lycée de Bordeaux; de Vigneral; A. D. R., élèves du lycée Charlemagne.

Questions 706 *et* 707

(voir 2e série, t. III, p. 252);

PAR M. A. SARTIAUX,
Élève de l'École Polytechnique.

On donne sur un plan deux circonférences (O), (O').

Par un point fixe A *de la première, on trace une conique* (C) *tangente en ce point à cette circonférence et doublement tangente à la seconde* (O′). *Cette conique* (C) *rencontre* (O) *aux points* D *et* E; *la droite* DE *coupe la corde de contact de* (C) *et de* (O′) *en un point* M : *lorsque l'on considère toutes les coniques* (C), *le lieu de ce point est une circonférence.* (MANNHEIM.)

Je prends le point A pour origine, pour axe des x la tangente menée par le point A à la circonférence (O), la perpendiculaire pour axe des y. Les équations des deux circonférences seront :

$$\text{(O)} \qquad x^2+y^2-2ry=0,$$
$$\text{(O}'\text{)} \qquad x^2+y^2-2ax-2by-c^2=0.$$

L'équation d'une conique doublement tangente à la circonférence (O′) est

$$x^2+y^2-2ax-2by-c^2+(mx+ny+p)^2=0;$$

$mx+ny+p=0$ est l'équation de la corde des contacts.

L'équation développée de la conique est

$$x^2(1+m^2)+y^2(1+n^2)+2mnxy-2x(a-mp)$$
$$-2y(b-np)-c^2+p^2=0.$$

La conique passe au point A et a pour tangente Ax, donc

$$p^2=c^2 \quad \text{et} \quad a=mp.$$

L'équation de la conique est alors

$$x^2(1+m^2)+y^2(1+n^2)+2mnxy-2y(b-np)=0.$$

Entre cette équation et l'équation du cercle (O), j'élimine x^2 : j'ai l'équation d'une conique passant par l'intersection de (C) et de (O) qui est

$$y^2(n^2-m^2)+2mnxy-2y[b-np-r(1+m^2)]=0.$$

C'est un système de deux droites ; l'une d'elles est l'axe des x, l'autre est la droite DE, et a pour équation

$$y(n^2 - m^2) + 2mnx - 2[b - np - r(1 + m^2)] = 0.$$

Le point M se trouve sur cette droite, et sur la droite des contacts

$$mx + ny + p = 0.$$

Entre ces deux équations, j'élimine n, et j'obtiens, en remplaçant mp par a et p^2 par c^2,

$$m^2(x^2 + y^2) + 2ax + 2y(b - r) - 2m^2ry + c^2 = 0,$$

équation d'un cercle ayant même axe radical que (O) et (O′).

Si nous cherchions l'enveloppe de la droite DE, nous trouverions la même équation.

En effet, l'équation de DE est, en ordonnant par rapport à n,

$$n^2y + 2n(mn + p) - m^2y - 2b + 2r(1 + m^2) = 0.$$

L'équation de l'enveloppe est

$$(mx + p)^2 = y[2r(1 + m^2) - m^2y - 2b]$$

ou

$$m^2(x^2 + y^2) + 2ax + 2y(b - r) - 2m^2ry + c^2 = 0,$$

et l'équation de l'axe radical des cercles (O), (O′) et du cercle trouvé est

$$2ax + 2y(b - r) + c^2 = 0.$$

Je transforme par polaires réciproques en prenant pour pôle de transformation l'un des points limites du système des cercles ayant même axe radical que (O) et (O′). Alors (O) et (O′) se transforment en deux coniques biconfocales, (O_1) et (O'_1) ; (C) se transforme en une conique

(C_1) doublement tangente à (O'_1) et tangente à (O_1) en un point fixe; DE se transforme en le point d'intersection des tangentes communes à (C_1) et (O_1); or DE enveloppe un cercle ayant même axe radical que (O) et (O'), donc le point d'intersection des tangentes communes à (C_1) et (O_1) enveloppe la transformée de ce cercle, c'est-à-dire une conique homofocale aux coniques (O_1) et (O'_1). C'est précisément la question 707.

Remarque. — Dans le premier problème on peut supposer nul le rayon du cercle (O'); alors les coniques (C) ont un foyer commun, et le point M est sur la directrice correspondante à ce foyer. Il est facile de trouver l'énoncé du théorème relatif à ce cas.

Note. — La question 706 a été résolue par MM. Léon Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans; Michel Lhopital, Léon Dyrion, H. Picquet, élèves de l'École Polytechnique; Aubrun, Gilliot, élèves du lycée de Strasbourg; Romain Delaune, répétiteur au lycée de Douai; Marmier, élève de l'École Sainte-Geneviève; Recoq, élève du lycée de Montpellier; Boutmy, élève du lycée Saint-Louis. MM. Cornu et Lacauchie, de Sainte-Barbe, ont résolu et généralisé les questions 706 et 707.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de Géométrie élémentaire; par MM. *Eugène Rouché*, professeur au lycée Charlemagne, répétiteur à l'École Polytechnique, etc., et *Ch. de Comberousse*, professeur au collége Chaptal, répétiteur à l'École Centrale, etc. — *Première partie:* Géométrie plane. In-8 avec figures dans le texte; 1864. Chez Gauthier-Villars, libraire, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55, à Paris. — Prix : 4 francs.

MM. Rouché et de Comberousse, bien connus déjà par leurs publications antérieures, ont eu pour but de faire

un livre qui contînt, d'une part, toutes les théories classiques exigées par les programmes de l'enseignement des lycées et pour l'admission aux Écoles spéciales, et, d'autre part, les principaux travaux qui ont été faits dans les temps modernes sur la Géométrie finie. Tout ce qui est relatif à la partie classique de l'ouvrage est développé avec le plus grand soin, tandis que la partie nouvelle offre une esquisse rapide mais complète de l'état actuel de la science, qui permettra aux lecteurs de prendre une idée exacte des méthodes modernes et des applications principales qui en ont été faites. Nous n'avons pas besoin de faire ressortir ce qu'une pareille division a d'avantageux au point de vue de l'enseignement.

Le Traité de Legendre, avec ses appendices et ses notes, était complet et représentait l'état de la science à l'époque où il a été publié. Mais depuis longtemps il est devenu insuffisant et plusieurs tentatives ont été faites pour le remplacer. Nous pensons que l'ouvrage dont nous voulons donner ici une courte analyse remplit parfaitement le but que se proposaient les auteurs.

Les deux parties dont nous avons dit que le Traité se composait sont nettement séparées. Celle qui renferme les théories classiques, et qui est imprimée en gros caractères, est conforme, pour l'ordre des matières, à l'usage consacré et généralement adopté dans tous les programmes. Les auteurs ont pensé qu'il y aurait danger à innover dans une disposition adoptée depuis des siècles, et ils ont voulu, non pas changer ce qui a été fait avant eux, mais améliorer ce qui leur semblait exiger quelques modifications. Ils ont, avec raison, attaché une grande importance au style; il suffit de lire quelques pages de ce livre pour reconnaître que la rédaction est extrêmement nette et soignée.

Parmi les améliorations que présente cet ouvrage, je

signalerai les suivantes, qui m'ont paru les plus remarquables.

1° Les véritables conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la proportionnalité de deux grandeurs sont énoncées pour la première fois avec la généralité et la précision convenables. Les n°s 132, 133, 134, 135 renferment la démonstration de principes fondamentaux dont l'application apporte plus tard une grande simplification dans toutes les questions de proportionnalité et de mesure qu'on rencontre si fréquemment dans la Géométrie, telles que la mesure des angles, des aires des rectangles, la proportionnalité des lignes droites, etc.

2° L'introduction des lignes antiparallèles a permis de donner des solutions élégantes pour plusieurs questions. Nous citerons l'inscription du décagone régulier ordinaire et du décagone étoilé (n° 290), la théorie des figures inverses, etc.

3° La mesure de la circonférence et le calcul de π sont présentés avec tous les détails qu'exige cette importante question. Nous signalerons surtout les considérations simples et nouvelles à l'aide desquelles les auteurs établissent rigoureusement que la longueur d'une ligne brisée régulière inscrite dans un arc de cercle tend vers une limite indépendante du mode de division de l'arc.

4° Certaines réciproques sont données avec un soin qu'on ne rencontre pas toujours dans ce genre de propositions. Nous citerons principalement celle du n° 196, sur la droite qui joint les points de division de deux côtés d'un triangle, celle du n° 222, sur les parallèles coupées par des sécantes, celle du n° 200, etc.

5° Enfin on trouve aux n°s 51, 211, 212, 213, etc., des aperçus généraux très-utiles pour l'intelligence et l'application des principes et des méthodes à la résolu-

tion des problèmes et à la recherche des lieux géométriques.

La partie de l'ouvrage imprimée en petits caractères contient plusieurs appendices consacrés à l'exposition des méthodes les plus remarquables de la Géométrie moderne. Cette partie s'adresse à des lecteurs déjà mieux préparés; la rédaction en est plus rapide, et l'on voit que l'on a voulu, non pas donner des théorèmes particuliers plus ou moins remarquables, mais exposer des théories constituant de véritables méthodes. Nous citerons surtout l'appendice du troisième Livre, relatif au rapport anharmonique, aux polaires réciproques, aux figures homothétiques, aux axes radicaux, au contact des cercles, à la transformation par rayons vecteurs réciproques, aux transversales, etc.

Cet ouvrage est enrichi de 593 exercices gradués et très-bien choisis, qui seront d'une utilité incontestable pour les Professeurs et les Élèves. Nous ne pensons pas qu'aucun Traité de Géométrie élémentaire en renferme un nombre aussi considérable.

Enfin nous ferons remarquer les soins qui ont été donnés à l'impression. Les caractères sont très-beaux, les énoncés des théorèmes se détachent parfaitement des démonstrations, et de nombreuses figures dans le texte rendent la lecture de l'ouvrage extrêmement facile; en un mot, ce livre soutient dignement la comparaison avec les plus belles éditions classiques qui soient sorties des presses de M. Gauthier-Villars.

S. Hauser,
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne.

QUESTIONS.

718. Trouver l'équation de la podaire négative de la développante de l'ellipse, le centre étant le pôle.

(Strebor.)

719. Sur la surface lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes d'un système homofocal, les trajectoires orthogonales de ces cercles sont des courbes dont chacune est une ligne de courbure commune de deux hyperboloïdes homofocaux avec les ellipsoïdes.

(Strebor.)

720. Soient x, y, z trois fonctions d'une variable indépendante t, satisfaisant à la condition

$$x^2+y^2+z^2=1;$$

soient x', y', z', x'', y'', z'' leurs dérivées, premières et secondes, par rapport à t.

Les neuf quantités x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' vérifient identiquement l'égalité

$$AC-B^2-A^3=D^2,$$

dans laquelle

$$A=x'^2+y'^2+z'^2,$$
$$B=x'x''+y'y''+z'z'',$$
$$C=x''^2+y''^2+z''^2,$$
$$D=x(y'z''-z'y'')+y(z'x''-x'y'')+z(x'y''-y'x'').$$

(Catalan.)

ÉTUDE DES POINTS A L'INFINI DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. PAINVIN,
Professeur au lycée de Douai.

Cette recherche servira d'intermédiaire entre l'étude que j'ai donnée précédemment des points à l'infini dans les courbes et celle des points à l'infini dans les surfaces que je donnerai prochainement (*).

En adoptant les coordonnées homogènes $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, l'équation générale des surfaces du second ordre sera de la forme

$$(\text{I})\,(\text{S})\left\{\begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2t(Cx + C'y + C''z) + Dt^2 = f(x, y, z, t) = 0, \end{array}\right.$$

et l'équation du plan à l'infini sera

$$t = 0.$$

Les points où la surface S est rencontrée par le plan à l'infini sont donnés par les équations

$$(\text{II})\,(\text{C})\left\{\begin{array}{l} t = 0, \\ Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ = \varphi(x, y, z) = 0. \end{array}\right.$$

La seconde équation représente un cône ayant pour sommet l'origine: je l'appellerai *cône des directions asymptotiques*.

(*) Les principaux résultats de cette dernière étude ont été présentés à l'Académie des Sciences en octobre 1864 (*Comptes rendus*, 2e semestre, 1864, p. 666).

Soit une génératrice de ce cône

$$\text{(G)} \qquad \begin{cases} x = mz, \\ y = nz; \end{cases}$$

on a la condition

$$\varphi(m, n, 1) = 0;$$

cette génératrice détermine le point à l'infini

$$\text{I} \begin{cases} t = 0, \\ x = mz, \\ y = nz. \end{cases}$$

Étudions l'intersection de la surface par une droite quelconque passant par le point I; les équations d'une telle droite seront

$$(1) \qquad \begin{cases} x = mz + \lambda t, \\ y = nz + \mu t. \end{cases}$$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation de la surface, on trouve

$$\begin{gathered} z^2 \varphi(m, n, 1) \\ + zt[\lambda \varphi'_x(m, n, 1) + \mu \varphi'_y(m, n, 1) + 2(Cm + C'n + C'')] \\ + Kt^2 = 0; \end{gathered}$$

cette équation, qui donne les intersections de la droite (1) avec la surface, se réduit à

$$\begin{gathered} zt[\lambda \varphi'_x(m, n, 1) + \mu \varphi'_y(m, n, 1) + 2(Cm + C'n + C'')] \\ + Kt^2 = 0. \end{gathered}$$

Pour que la droite (1) soit tangente à la surface, il faut que le premier membre de l'équation précédente soit divisible par t^2; de là la condition

$$(2) \quad \lambda \varphi'_x(m, n, 1) + \mu \varphi'_y(m, n, 1) + 2(Cm + C'n + C'') = 0.$$

Pour obtenir le lieu de toutes les droites (évidemment

parallèles) passant par le point I et tangentes à la surface, il faut éliminer λ et μ entre les équations (1) et (2). Effectuons cette élimination, et remarquons que l'identité

$$x\varphi'_x(x,y,z)+y\varphi'_y(x,y,z)+z\varphi'_z(x,y,z)=2\varphi(x,y,z)$$

nous donne, en y faisant $x=m$, $y=n$, $z=1$, et en ayant égard à l'équation de condition $\varphi(m,n,1)=0$,

$$m\varphi'_x(m,n,1)+n\varphi'_y(m,n,1)+\varphi'_z(m,n,1)=0;$$

nous trouvons alors que le lieu des droites passant par le point I et tangentes à la surface, ou, ce qui revient au même, des droites parallèles à la direction asymptotique ($x=mz$, $y=nz$) et tangentes à la surface, est donné par l'équation

$$\text{(III)(T)}\ \begin{cases} x\varphi'_x(m,n,1)+y\varphi'_y(m,n,1)+z\varphi'_z(m,n,1) \\ \qquad +2t(\mathrm{C}m+\mathrm{C}'n+\mathrm{C}'')=0, \end{cases}$$

avec la condition

$$\varphi(m,n,1)=0.$$

Cette équation représente un plan que nous appellerons *plan asymptote* de la surface *correspondant à la direction asymptotique* (G).

Ce plan est évidemment parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques

$$\varphi(x,y,z)=0$$

suivant la génératrice ou direction asymptotique ($x=mz$, $y=nz$).

Remarque I. — Le plan asymptote correspondant à la direction asymptotique G est le plan tangent à l'infini au point correspondant à cette direction asymptotique. Car on constate facilement que l'équation du plan asymptote (T) se déduit de celle du plan tangent au point

(x_1, y_1, z_1, t_1)

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} + tf'_{t_1} = 0,$$

en supposant

$$x_1 = mz_1, \quad y_1 = nz_1, \quad t_1 = 0.$$

En effet, on a

$$(3) \quad f(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) + 2t(Cx + C'y + C''z) + Dt^2;$$

d'où

$$f'_{x_1} = \varphi'_x(x_1, y_1, z_1) = z_1\varphi'_x(m, n, 1),$$
$$f'_{y_1} = \varphi'_y(x_1, y_1, z_1) = z_1\varphi'_y(m, n, 1),$$
$$f'_{z_1} = \varphi'_z(x_1, y_1, z_1) = z_1\varphi'_z(m, n, 1),$$
$$f'_{t_1} = 2(Cx_1 + C'y_1 + C''z_1) = 2z_1(Cm + C'n + C'');$$

en opérant la substitution de ces valeurs, l'équation du plan tangent devient

$$x\varphi'_x(m, n, 1) + y\varphi'_y(m, n, 1) + z\varphi'_z(m, n, 1)$$
$$+ 2t(Cm + C'n + C'') = 0;$$

c'est l'équation du plan (T).

Remarque II. — Le plan asymptote est aussi le plan diamétral conjugué de la direction $(x = mz, y = nz)$.

En effet, d'après l'identité (3), l'équation du plan (T) peut s'écrire

$$mf'_x + nf'_y + f'_z = 0.$$

Mais ici, il résulte de la remarque générale déjà faite que le plan diamétral est parallèle aux cordes qui lui sont conjuguées; d'ailleurs, on a évidemment

$$m\varphi'_x(m, n, 1) + n\varphi'_y(m, n, 1) + \varphi'_z(m, n, 1) = 2\varphi(m, n, 1) = 0,$$

ce qui démontre le parallélisme indiqué.

DISCUSSION.

1° Le cône des directions asymptotiques est un

CÔNE PROPREMENT DIT, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (C) ou (II) est la somme algébrique de trois carrés; ce cas correspond à celui où la surface a un *centre unique* (*genre ellipsoïde, genre hyperboloïde*).

On peut alors faire disparaître les trois termes du premier degré et supposer l'équation de la surface ramenée à la forme

$$(4)\,(\mathrm{S})\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = Ht^2.$$

Le cône des directions asymptotiques sera

$$(5)\,(\mathrm{C})\quad \begin{cases} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ \qquad = \varphi(x, y, z) = 0; \end{cases}$$

une droite quelconque parallèle à une génératrice du cône des directions asymptotiques rencontre la surface en UN *point à l'infini.*

Le plan asymptote correspondant à la direction asymptotique ($x = mz$, $y = nz$) aura pour équation

$$x\varphi'_x(m, n, 1) + y\varphi'_y(m, n, 1) + z\varphi'_z(m, n, 1) = 0.$$

On voit que les plans asymptotes enveloppent le cône (C); ce cône est appelé *cône asymptote;* son sommet est l'origine actuelle ou le centre de la surface.

Ainsi, *dans les surfaces à centre unique, les plans asymptotes ou plans tangents à l'infini touchent un cône, parallèle au cône des directions asymptotiques, qu'on nomme* CÔNE ASYMPTOTE; *le sommet du cône asymptote est le centre de la surface.*

Un plan tangent à une surface du second ordre coupe la surface suivant deux droites réelles ou imaginaires dont le point de concours est le point de contact. (Ceci résulte de la propriété générale des plans tangents : le point de contact est un point double de la section faite

par le plan tangent.) Donc, *un plan asymptote ou tangent à l'infini coupe la surface suivant deux droites réelles ou imaginaires* PARALLÈLES *à la génératrice de contact de ce plan avec le cône asymptote.*

Remarque I. — Le cône asymptote est circonscrit à la surface, le plan de la courbe de contact est le plan à l'infini.

Ceci résulte évidemment des équations (4) et (5), car l'équation (4) est l'équation d'une surface circonscrite au cône (C) suivant la courbe située dans le plan $t = 0$.

On conclut de là, en reprenant l'équation générale (I) des surfaces du second ordre, que l'équation du cône asymptote est de la forme

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ \qquad + 2t(Cx + C'y + C''z) + D_1 t^2 = 0. \end{array} \right.$$

On déterminera D_1 en exprimant que cette dernière équation représente un cône.

Remarque II. — Si le cône des directions asymptotiques est imaginaire, la surface n'a pas de points réels à l'infini ; c'est le cas de *l'ellipsoïde* ou de ses variétés.

Si ce cône est réel, la surface a des nappes infinies ; c'est le cas des *hyperboloïdes.*

II° LE CÔNE DES DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES SE RÉDUIT A DEUX PLANS DISTINCTS, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (II) est la somme algébrique de deux carrés ; ce cas correspond à celui où le centre est à l'infini sur une direction déterminée, ou bien à celui où il y a une infinité de centres en ligne droite (*paraboloïde elliptique ou hyperbolique, cylindre elliptique ou hyperbolique*).

Supposons donc que la fonction $\varphi(x, y, z)$ soit de la

forme

$$(6) \quad \varphi(x, y, z) = (Mx + Ny + Pz)(M_1x + N_1y + P_1z) = D.D_1;$$

l'intersection de la surface par le plan à l'infini se compose des deux droites distinctes

$$\Delta \begin{cases} D = Mx + Ny + Pz = 0, \\ t = 0; \end{cases}$$

$$\Delta \begin{cases} D_1 = M_1x + N_1y + P_1z = 0, \\ t = 0; \end{cases}$$

les directions asymptotiques sont parallèles à l'un ou à l'autre des deux plans (D) et (D_1); ces deux plans portent le nom de *plans directeurs*.

Ainsi, *une droite quelconque parallèle à l'un ou à l'autre des plans directeurs rencontre la surface en* UN *point à l'infini.*

Considérons une direction asymptotique

$$\begin{cases} x = mz, \\ y = nz \end{cases}$$

parallèle au plan (D), par exemple, de sorte que

$$(7) \qquad Mm + Nn + P = 0;$$

le plan asymptote correspondant au point à l'infini

$$(x = mz, \quad y = nz, \quad t = 0)$$

aura pour équation, d'après (III) et (6),

$$(8) \quad \begin{cases} (M_1m + N_1n + P_1)(Mx + Ny + Pz) \\ \quad + 2t(Cm + C'n + C'') = 0. \end{cases}$$

Nous distinguerons deux cas :

1er CAS. — On ne peut pas, dans l'hypothèse actuelle, faire disparaître les trois termes du premier degré : c'est le cas des *paraboloïdes*.

Alors le plan asymptote (8) est parallèle au plan directeur (D); on peut, en outre, disposer des arbitraires *m* et *n*, assujetties à vérifier l'unique relation (7), de manière que l'équation (8) représente un plan quelconque parallèle au plan (D). On raisonnerait de même à l'égard du plan (D_1). Ainsi :

Dans les PARABOLOÏDES, *les directions asymptotiques sont des droites quelconques parallèles à l'un ou à l'autre des plans directeurs, et tout plan parallèle à un plan directeur est un plan asymptote, c'est-à-dire touche la surface à l'infini. Les plans asymptotes parallèles au plan directeur* (D) *passent par la droite à l'infini* Δ, *et le point de contact est un point de cette droite; d'ailleurs, le point de contact varie de position lorsque le plan asymptote se déplace parallèlement à lui-même. Les plans asymptotes parallèles au plan directeur* (D_1) *passent par la droite à l'infini* (Δ_1).

Remarque I. — Il y a une direction asymptotique, et une seule, pour laquelle le plan asymptote ou le plan tangent est le plan à l'infini; cette direction est donnée par l'intersection des deux plans directeurs

$$(D) \qquad Mx + Ny + Pz = 0,$$
$$(D_1) \qquad M_1x + N_1y + P_1z = 0.$$

L'équation (8) du plan asymptote se réduit alors à

$$t = 0;$$

c'est l'équation du plan à l'infini. Ainsi, au point à l'infini

$$\begin{cases} Mx + Ny + Pz = 0, \\ M_1x + N_1y + P_1z = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

le plan tangent est le plan à l'infini; donc :

Les paraboloïdes touchent le plan à l'infini et le touchent en un point unique.

Remarque II. — Lorsque les plans directeurs (D) et (D_1) sont imaginaires (c'est le cas du paraboloïde elliptique), la surface n'a pas de point réel à l'infini, excepté celui qui se trouve à l'intersection des deux plans directeurs, intersection toujours réelle. Ainsi :

Dans le paraboloïde elliptique, il n'y a de direction asymptotique réelle que la droite parallèle à l'intersection des plans directeurs, et le plan asymptote correspondant est le plan à l'infini.

2e CAS. — On peut faire disparaître les trois termes du premier degré : c'est le cas des cylindres elliptique et hyperbolique.

L'équation de la surface pouvant être ramenée à la forme

$$(9) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = Ht^2,$$

l'équation du cône des directions asymptotiques sera encore

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$= (Mx + Ny + Pz)(M_1x + N_1y + P_1z) = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (8) du plan asymptote devient

$$(M_1m + N_1n + P_1)(Mx + Ny + Pz) = 0$$

ou

$$Mx + Ny + Pz = 0.$$

Donc, *dans les cylindres elliptique et hyperbolique, tous les plans tangents à l'infini se confondent avec les plans menés par la ligne des centres parallèlement aux plans directeurs ; ces* DEUX *plans touchent respectivement la surface tout le long des droites à l'infini* (Δ)

ou (Δ_1); *on peut les appeler* PLANS ASYMPTOTES *du cylindre.*

Un plan asymptote coupe la surface suivant deux droites confondues avec la droite à l'infini située dans ce plan; tout plan parallèle, devant passer par cette droite à l'infini, ne coupera la surface que suivant *une seule droite* à distance finie. L'ensemble des deux plans asymptotes forme un système *circonscrit* à la surface, le plan de la courbe de contact est le plan à l'infini.

Remarque I. — Si nous considérons le point particulier à l'infini situé sur une droite parallèle à l'intersection des deux plans directeurs, savoir :

$$(\mathrm{J})\qquad \begin{cases} Mx + Ny + Pz = 0, \\ M_1x + N_1y + P_1z = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

l'équation (8) se réduit à une identité.

Le point J est, en effet, un *point double* de la surface; car une droite quelconque passant par ce point, par exemple,

$$\begin{cases} Mx + Ny + Pz = \lambda t, \\ M_1x + N_1y + P_1z = \mu t, \end{cases}$$

rencontre la surface (9) en deux points coïncidents, puisque l'équation se réduit à $(\lambda\mu - H)\,t^2 = 0$; ainsi :

Dans les cylindres elliptique ou hyperbolique, le point à l'infini situé sur la ligne des centres est un point double; les tangentes en ce point double sont les génératrices du cylindre.

Remarque II. — Les deux *plans asymptotes* sont imaginaires dans le cylindre elliptique, réels dans le cylindre hyperbolique.

Le cylindre elliptique ne possède, comme point réel à l'infini, que le point double J.

III° Le cône des directions asymptotiques se réduit a deux plans qui se confondent, c'est-à-dire que le premier membre de l'équation (II) se réduit à un carré parfait; ce cas correspond à celui où le centre est à l'infini sur un plan de direction déterminée, ou bien à celui où il y a une infinité de centres dans un plan (*cylindre parabolique, deux plans parallèles*).

Supposons donc que la fonction $\varphi(x, y, z)$ soit de la forme

$$(10) \qquad \varphi(x, y, z) = (Mx + Ny + Pz)^2 = D^2;$$

l'intersection de la surface par le plan à l'infini se compose de deux droites confondues avec la droite

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} D = Mx + Ny + Pz = 0, \\ t = 0; \end{cases}$$

toutes les directions asymptotiques sont parallèles au plan (D).

1[er] cas. — On ne peut pas faire disparaître les trois termes du premier degré (c'est le cas du *cylindre parabolique*).

Le plan asymptote correspondant à une direction asymptotique quelconque a pour équation [(III) ou (8)]

$$t(Cm + C'n + C'') = 0, \quad \text{ou} \quad t = 0;$$

donc, *tous les plans asymptotes ou tangents à l'infini, dans le cylindre parabolique, se confondent avec le plan à l'infini parallèle au plan directeur* (D).

On voit que la surface touche le plan à l'infini suivant la droite (Δ), car, pour $t = 0$, on a

$$(Mx + Ny + Pz)^2 = 0;$$

donc, *un cylindre parabolique touche le plan à l'infini suivant une droite.*

Un plan quelconque, parallèle au plan (D), passera par la droite (Δ), et, par suite, ne rencontrera la surface qu'en *une seule droite* à distance finie.

Nous avons remarqué que les plans asymptotes sont des plans diamétraux conjugués de la direction asymptotique correspondante; donc, *tous les plans diamétraux conjugués des cordes parallèles au plan* (D) *sont à l'infini.*

Remarque. — Nous pouvons encore présenter ainsi ces résultats : Dans le *cylindre parabolique,* une droite quelconque parallèle aux plans diamétraux rencontre la surface en un point à l'infini et en un point à distance finie; mais les droites, parallèles aux plans diamétraux et non parallèles aux génératrices du cylindre, et rencontrant en outre la surface en deux points à l'infini, sont *toutes* à l'infini; c'est-à-dire que les plans asymptotes, correspondant à une direction asymptotique quelconque, non parallèles aux génératrices du cylindre, se confondent *tous* avec le plan à l'infini.

Les droites parallèles aux génératrices du cylindre rencontrent la surface en deux points à l'infini; le point à l'infini sur la direction des génératrices est en effet un *point double* de la surface, et les tangentes proprement dites à la surface en ce point sont précisément les génératrices du cylindre.

2e cas. — On peut faire disparaître les trois termes du premier degré (c'est le cas de deux plans parallèles).

L'équation de la surface peut être ramenée à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = Ht^2,$$

ou

$$(11) \qquad (Mx + Ny + Pz)^2 = Ht^2;$$

les directions asymptotiques sont toujours parallèles au

plan

$$D = Mx + Ny + Pz = 0;$$

mais l'équation du plan asymptote

$$x\varphi'_x(m_1, n_1, 1) + y\varphi'_y(m_1, n_1, 1) + z\varphi'_z(m_1, n_1, 1) = 0$$

se réduit à une identité pour toutes les valeurs de m et n qui vérifient la relation

$$Mm + Nn + P = 0.$$

C'est qu'en effet la droite à l'infini (Δ) est une *droite double* de la surface.

Un plan quelconque passant par cette droite, c'est-à-dire parallèle au plan directeur (D), par exemple

$$Mx + Ny + Pz = \lambda t,$$

rencontre la surface suivant deux droites qui coïncident avec la droite (Δ), car l'équation (11) donne alors

$$(\lambda^2 - H)t^2 = 0.$$

Les plans tangents proprement dits suivant cette droite double sont les plans mêmes qui constituent la surface.

Toute droite parallèle au plan (D) rencontre la surface en deux points coïncidents sur la droite à l'infini (Δ).

On peut de cette discussion conclure la classification suivante.

I° *Les termes du second degré peuvent se ramener à la somme algébrique de trois carrés, c'est-à-dire donnent* UN CÔNE :

Cône imaginaire...... GENRE ELLIPSOÏDE;
Cône réel........... GENRE HYPERBOLOÏDE.

II° *Les termes du second degré peuvent se ramener à*

la somme algébrique de deux carrés, c'est-à-dire donnent DEUX PLANS *qui se coupent :*

1° Pas de centre....	*Plans imaginaires..*	PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.
	Plans réels.......	PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE
2° Infinité de centres.	*Plans imaginaires..*	CYLINDRE ELLIPTIQUE.
	Plans réels.... ..	CYLINDRE HYPERBOLIQUE.

III° *Les termes du second degré forment un carré parfait, c'est-à-dire donnent* DEUX PLANS CONFONDUS :

1° Pas de centre........	CYLINDRE PARABOLIQUE.
2° Infinité de centres....	DEUX PLANS PARALLÈLES.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES SURFACES;

PAR M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

I. — INTRODUCTION.

1. *Si l'on considère une série d'ellipses homofocales et qu'on mène par un point pris sur l'un des axes des tangentes à toutes ces ellipses, le lieu des points de contact est une circonférence.*

2. *Si l'on prend un point* P *sur l'un des axes et un point* Q *sur l'autre, les circonférences relatives à ces deux points se coupent orthogonalement.*

3. *Si l'on fait varier la position des points* P *et* Q *sur les deux axes, on obtient deux systèmes de cercles orthogonaux.*

II. — SURFACES HOMOFOCALES.

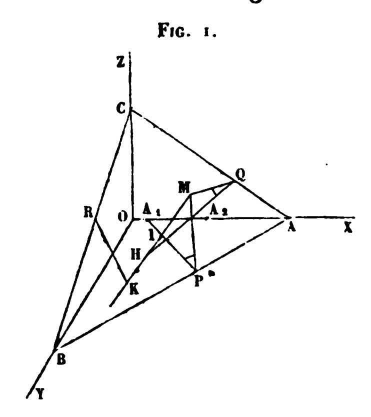
4. *Si l'on considère un système d'ellipsoïdes homo-*

focaux et que par une droite AB *située dans l'un des plans principaux on mène des plans tangents à tous ces ellipsoïdes, le lieu des points de contact est une circonférence.*

En effet, les normales en ces différents points rencontrent le plan principal en un même point I, qui est le pôle de la droite AB par rapport à la conique excentrique située dans ce plan principal (M. Chasles, *Aperçu historique*). (Cela résulte immédiatement d'une propriété essentielle et caractéristique des surfaces homofocales qui peut servir de point de départ à une théorie géométrique de ces surfaces, savoir : *Les pôles d'un même plan, par rapport à une série de surfaces homofocales, sont situés sur une même droite perpendiculaire à ce plan.*)

5. *A trois droites* AB, BC, CA *situées respectivement dans les trois plans principaux, et rencontrant les axes aux points* A, B, C, *correspondent trois circonférences qui se coupent deux à deux orthogonalement.*

Fig. 1.



Soit, en effet, M (*fig.* 1) le point de contact du plan ABC avec l'un des ellipsoïdes homofocaux, et I, H, K

les points où la normale en M rencontre les trois plans principaux. Abaissons de ces trois points des perpendiculaires IP, HQ, KR sur AB, AC et BC. La circonférence relative à la droite AB est décrite sur IP comme diamètre dans un plan perpendiculaire à XOY; la circonférence relative à AC est décrite sur HQ comme diamètre dans un plan perpendiculaire à XOZ; et enfin la circonférence relative à BC est décrite sur KR comme diamètre dans un plan perpendiculaire à YOZ.

La normale MI coupe la première circonférence sous un angle α égal à MPI; cette même droite coupe la deuxième circonférence sous un angle β égal à MQH. Si l'on désigne par V l'angle de ces deux circonférences, le trièdre formé par la droite MI et les tangentes en M aux deux circonférences donne

$$\text{(1)} \qquad \cos V = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta . \cos PMQ.$$

Mais l'angle PMQ est supplémentaire de PAQ, et, dans le trièdre rectangle qui a pour arêtes AO, AB, AC, on a

$$\text{(2)} \qquad \cos PAQ = \cot\alpha \cot\beta,$$

donc

$$\cos V = 0 :$$

l'angle V est droit, ce qu'il fallait démontrer.

6. *Si du point* A *on circonscrit des cônes à tous les ellipsoïdes homofocaux, les courbes de contact de ces cônes formeront une certaine surface. Si, de même, des deux points* B *et* C *on circonscrit des cônes à ces ellipsoïdes, on aura deux autres surfaces. Ces trois surfaces se coupent deux à deux suivant des cercles.*

Considérons, en effet, deux cônes ayant pour sommets A et B et circonscrits à un même ellipsoïde; et soit M

l'un des points d'intersection de leurs courbes de contact. Le plan MAB est tangent en M à cet ellipsoïde; donc, d'après le n° 4, la circonférence qui a pour diamètre IP est l'intersection des surfaces relatives aux points A et B. On verrait, de même, que le cercle qui a pour diamètre HQ est l'intersection des surfaces relatives à A et à C, et que le cercle qui a pour diamètre KR est l'intersection des surfaces relatives à B et à C. Or, il vient d'être démontré, n° 5, que ces trois cercles se coupent deux à deux orthogonalement; donc, les plans tangents en M aux trois surfaces sont perpendiculaires entre eux.

7. *Si l'on fait varier la position des points* A, B *et* C, *respectivement sur les trois axes, on aura trois familles de surfaces se coupant orthogonalement.*

Ce système triple orthogonal a été découvert par M. W. Roberts dans un travail intéressant *sur quelques systèmes de surfaces orthogonales obtenus par la méthode des coordonnées elliptiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LIII, 23 septembre 1861).

La méthode géométrique qui précède a l'avantage de déduire directement ce système, par des considérations tout élémentaires, des propriétés les plus simples des surfaces du second degré homofocales.

8. Ces trois familles de surfaces orthogonales se coupent mutuellement, d'après le théorème de M. Dupin, suivant leurs lignes de courbure; or, nous avons vu, n° 6, que leurs intersections sont des cercles; ce sont donc des surfaces à *lignes de courbure circulaires*.

9. Si l'on considère l'une de ces surfaces, celle qui est relative au point A, par exemple, on reconnaîtra facilement que les lignes de courbure d'un système de cette surface sont dans des plans perpendiculaires à XOY et

passant par un même point A_1 de l'axe OX, et que les lignes de courbure de l'autre système sont dans des plans perpendiculaires à XOZ et passant par un point fixe A_2 de ce même axe OX. Cela résulte d'une propriété bien connue des sections coniques, savoir : *lorsqu'une droite située dans le plan d'une conique tourne autour de son point d'intersection avec l'un des axes, la perpendiculaire, abaissée sur cette droite de son pôle par rapport à la conique, rencontre l'axe en un point fixe.*

(*La suite prochainement.*)

NOTE

sur quelques propriétés du lieu des centres des coniques assujetties à quatre conditions, ou des surfaces du second degré assujetties à sept ou à huit conditions ;

Par M. H. PICQUET,
Élève de l'École Polytechnique.

---

1. Le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points est une conique qui passe par les milieux des côtés du quadrilatère ayant ces quatre points pour sommets et par les points de rencontre des côtés opposés, en tout neuf points, en considérant les diagonales du quadrilatère comme deux côtés opposés. C'est la conique des neuf points du quadrilatère. Il en résulte que si une conique est déterminée par cinq points, lesquels considérés quatre à quatre forment cinq quadrilatères, son centre devant se trouver à la fois sur les cinq coniques des neuf points, ces cinq coniques passeront par un même point, centre de la conique déterminée par les cinq points donnés. Donc :

Théorème I. — *Les cinq coniques des neuf points des cinq quadrilatères auxquels donnent lieu cinq points*

quelconques, considérés quatre à quatre, passent par un même point.

2. D'après ce que nous venons de dire, la conique des neuf points d'un quadrilatère est circonscrite au parallélogramme qui a pour sommets les milieux des côtés du quadrilatère ; elle a donc pour centre le centre de ce parallélogramme. Il est facile d'après cela de vérifier par une figure que le pentagone des cinq centres est semblable au pentagone des cinq points donnés et semblablement placé, et que le rapport de similitude est $\frac{1}{4}$. Donc :

Théorème II. — *Les cinq centres des cinq coniques des neuf points des cinq quadrilatères auxquels donnent lieu cinq points quelconques, considérés quatre à quatre, sont les sommets d'un pentagone semblable au pentagone de ces cinq points, et semblablement placé, le rapport de similitude étant* $\frac{1}{4}$.

3. Si les cinq points donnés sont sur une même hyperbole équilatère H, l'un d'eux est inutile pour la déterminer et nous pouvons le négliger. Les trois autres, considérés trois à trois, forment quatre triangles, dans chacun desquels le cercle des neuf points est le lieu des centres des hyperboles équilatères qui lui sont circonscrites. Le centre de l'hyperbole H devant se trouver à la fois sur les quatre cercles des neuf points, ces quatre cercles passeront par un même point, centre de l'hyperbole. Donc :

Théorème III. — *Les quatre cercles des neuf points des quatre triangles ayant pour sommets quatre points quelconques, considérés trois à trois, passent par un même point.*

Ce dernier théorème est énoncé par M. Matthieu (t. II, p. 476), qui fait remarquer également que l'hy-

perbole passera par les quatre points de rencontre des hauteurs des quatre triangles. On peut observer encore que, si l'on opère sur ces quatre points comme sur les quatre premiers, on aura quatre autres points de l'hyperbole, et ainsi de suite indéfiniment, ce qui fournit le moyen de construire par points une hyperbole équilatère dont on connaît quatre points. Donc :

Théorème IV. — *Étant donnés quatre points, ils forment quatre triangles dont on peut construire les quatre points de rencontre des hauteurs, de même ces quatre derniers, et ainsi de suite. Le lieu de tous ces points est l'hyperbole équilatère déterminée par les quatre points donnés, et tous les cercles des neuf points des triangles formés par tous ces points passent par un même point.*

4. Les deux derniers théorèmes, transformés par la méthode des polaires réciproques, donnent lieu à deux théorèmes assez intéressants. Prenons pour courbe directrice un cercle, et cherchons d'abord la transformée de la figure formée par un triangle, le point de rencontre des hauteurs, et le cercle des neuf points. Un triangle se transforme en un triangle ABC; soit O le pôle de transformation : si l'on joint OA et si l'on mène Oα perpendiculaire à OA jusqu'au point de rencontre avec BC, on obtient un point α qui est en ligne droite avec les deux points analogues β, γ, et la droite $\alpha\beta\gamma$ est la polaire du point de rencontre des hauteurs du premier triangle. Donc :

Théorème V. — *Étant donnés un triangle* ABC *et un point* O *dans son plan, on joint* OA, *on mène* Oα *perpendiculaire sur* OA *jusqu'au point de rencontre* α *avec* BC; *ce point et deux autres points analogues* β, γ *sont en ligne droite.*

Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent aux

cercles inscrit et exinscrits. Ces derniers se transforment en quatre coniques ayant pour foyer le point O et circonscrites au triangle ABC. On sait en effet qu'il y a toujours quatre coniques ayant pour foyer un point donne et passant par trois points. Le cercle des neuf points se transformera dans ce cas en une conique ayant pour foyer le même point O et tangente aux quatre précédentes. Donc :

Théorème VI. — *Étant donné un triangle, il existe quatre coniques ayant pour foyer un point donné et circonscrites au triangle; il en existe une cinquième ayant pour foyer le même point et tangente aux quatre premières.*

Pour plus de simplicité, appelons cette conique et la droite $\alpha\beta\gamma$ la conique et la droite dérivées du triangle ABC, il est facile de transformer maintenant les théorèmes III et IV.

Théorème VII. — *Les quatre coniques dérivées des quatre triangles formés par quatre droites quelconques considérées trois à trois ont une tangente commune.*

Théorème VIII. — *Étant données quatre droites, elles forment quatre triangles dont on peut construire les quatre droites dérivées pour un même point O, de même pour ces quatre dernières, et ainsi de suite. L'enveloppe de toutes ces droites est une conique, et toutes les coniques dérivées des triangles formés par toutes ces droites sont tangentes à une même droite.*

5. Revenons à notre sujet, et supposons qu'une conique soit déterminée par cinq points. Si les cinq points sont sur un même cercle, les cinq coniques des neuf points sont des hyperboles équilatères. On sait en effet que lorsque deux droites passent par les points d'intersection d'un cercle et d'une conique, elles sont également

inclinées sur les axes de la conique. Considérons alors quatre points sur un même cercle, et les deux paraboles qui passent par ces quatre points (car ils forment un quadrilatère convexe); elles ont leurs centres à l'infini respectivement sur chaque bissectrice de l'angle formé par deux côtés opposés quelconques du quadrilatère des quatre points : les trois systèmes de deux bissectrices sont en effet parallèles, d'après la propriété connue du quadrilatère inscriptible. Il en résulte que le lieu des centres des coniques qui passent par les quatre points est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices d'un même angle, et par suite équilatère. Si l'on a cinq points, les cinq hyperboles équilatères passeront par le centre du cercle. Donc :

Théorème IX. — *La conique des neuf points d'un quadrilatère inscriptible est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par deux côtés opposés quelconques du quadrilatère.*

Ce théorème fait l'objet de la seconde partie de la question 625, et une première solution en a été donnée (t. III, p. 265).

6. Si les cinq points sont sur une même parabole, les cinq coniques des neuf points ont une direction asymptotique commune. S'ils sont distribués sur deux droites parallèles, les cinq coniques des neuf points se composent d'un système de deux droites, à chacun desquels appartient la droite équidistante des deux droites parallèles sur lesquelles sont distribués les cinq points.

Extension à l'espace.

1. Le lieu des centres des surfaces du second degré

qui passent par huit points distincts est la cubique gauche du système de ces huit points. Si donc une surface du second degré est déterminée par neuf points distincts, ces neuf points donnent lieu à neuf systèmes de huit points, et par suite à neuf cubiques gauches qui passeront toutes par un même point, centre de la surface du second degré déterminée par les neuf points donnés. Donc :

Théorème X. — *Les neuf cubiques gauches des neuf systèmes de huit points fournis par neuf points distincts passent par un même point.*

2. Le lieu des centres des surfaces du second degré qui passent par sept points est une surface du troisième degré. Soient en effet

$$S = 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0$$

les équations de trois des surfaces du second degré passant par les sept points, l'équation de l'une quelconque d'entre elles sera

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2 = 0,$$

et son centre sera donné par les équations

$$\begin{aligned} \lambda S'_x + \mu S'_{1x} + \nu S'_{2x} &= 0, \\ \lambda S'_y + \mu S'_{1y} + \nu S'_{2y} &= 0, \\ \lambda S'_z + \mu S'_{1z} + \nu S'_{2z} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminant λ, μ, ν, il vient

$$\begin{vmatrix} S'_x & S'_{1x} & S'_{2x} \\ S'_y & S'_{1y} & S'_{2y} \\ S'_z & S'_{1z} & S'_{2z} \end{vmatrix} = 0,$$

équation d'une surface du troisième degré. Nous pouvons en déterminer vingt-huit points, car si par six des points

donnés nous faisons passer une surface du second degré qui ait pour centre le milieu de la droite qui joint l'un d'eux au septième, elle passera par le septième; donc le point milieu de cette droite appartient au lieu des centres; de plus, toutes les surfaces représentées par l'équation

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2 = 0$$

passent par un huitième point fixe, et comme il y a vingt-huit droites qui joignent huit points deux à deux, nous obtenons ainsi vingt-huit points du lieu des centres que nous appellerons alors la surface des vingt-huit points du système des sept points donnés. Supposons donc qu'une surface du second degré soit déterminée par neuf points distincts, ces neuf points donnent lieu à trente-six systèmes de sept points, et, par suite, à trente-six surfaces des vingt-huit points, qui passeront toutes par un même point, centre de la surface du second degré déterminée par les neuf points donnés. Donc :

Théorème XI. — *Les trente-six surfaces des vingt-huit points des trente-six systèmes de sept points fournis par neuf points distincts passent par un même point.*

3. Toutes les surfaces du second degré qui passent par sept points ont un huitième point commun. Il en résulte que si une surface du second degré est déterminée par neuf points, on pourra en connaître trente-six autres, lesquels en fourniront $\frac{36.35.34\ldots30}{1.2\ldots7}$ autres, et ainsi de suite. Les surfaces des ving-huit points de tous les systèmes de sept points auxquels ils peuvent donner lieu passeront toujours par le même point. Il est vrai que le huitième point n'est pas déterminé géométriquement, de sorte que tout ceci est plutôt théorique que pratique.

4. Supposons que les neuf points ne soient pas quelconques, mais qu'ils soient sur une même ligne à double courbure, intersection de deux surfaces du second degré; nous pouvons négliger l'un d'eux. Alors nous pouvons déterminer la surface du second degré par une autre condition quelconque; dans tous les cas, la cubique gauche des huit points donnés et les huit surfaces des vingt-huit points des huit systèmes de sept points auxquels ils donnent lieu passeront par un même point, centre de la surface. Au moyen des huit points donnés on pourra également en déterminer huit autres, et ainsi de suite.

5. Si l'un des huit points est le point fixe par où passent toutes les surfaces du second degré qui contiennent les sept autres, nous pouvons le négliger dans ce cas. On connaît alors sept points de la surface, et son centre est sur une surface du troisième degré, surface des vingt-huit points du système des sept points donnés. Les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre sont dans ce cas; toutes les surfaces du second degré qui passent par sept d'entre eux passent par le huitième et sont toutes des hyperboloïdes équilatères; de même que dans le plan toutes les coniques qui passent par trois des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits à un triangle passent par le quatrième point de rencontre des hauteurs du triangle des trois autres, et sont toutes des hyperboles équilatères. Il en résulte donc ce théorème, que les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre sont sur une même surface du troisième degré. M. Beltrami l'a énoncé et proposé le premier; mon camarade Max Cornu et moi nous l'avons démontré (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 225)

par un calcul très-pénible que pouvaient remplacer, comme on le voit, quelques lignes d'explication. Cette surface est la surface des vingt-huit points du système des centres des huit sphères. La proposition qui précède est un cas particulier de la suivante, démontrée précédemment.

Théorème XII. — *Les points milieux des vingt-huit droites qui joignent deux à deux huit points non distincts sont sur une surface du troisième degré.*

6. Nous voyons que cette surface a, par rapport au système des huit centres, une propriété analogue à celle du cercle des neuf points du triangle de trois des centres par rapport au système des quatre centres des cercles inscrit et exinscrits à un triangle. *Elle en a peut-être d'autres.* M. A. S., qui a envoyé une seconde solution de la question 663, a fait voir que, par rapport au tétraèdre circonscrit aux huit sphères, elle jouit d'une propriété analogue à celle du cercle circonscrit à un triangle, savoir :

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point de la surface sur les quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan.

Nous savons d'autre part que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer d'un paraboloïde de révolution sur les plans tangents est le plan tangent au sommet; il en résulte que si nous considérons un tétraèdre circonscrit à un paraboloïde de révolution, le foyer appartiendra au lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un d'eux sur les quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan. Donc :

Théorème XIII. — *Étant donné un paraboloïde de révolution et quatre plans tangents, le lieu des centres*

des surfaces du second degré qui passent par les centres des huit sphères inscrites dans ces quatre plans passe par le foyer du paraboloïde.

En d'autres termes, le foyer d'un paraboloïde de révolution est le centre d'une surface du second degré qui passe par les centres des huit sphères inscrites dans quatre plans tangents au paraboloïde. Si le paraboloïde est déterminé par six plans tangents, qui, considérés quatre à quatre, forment quinze tétraèdres, les quinze surfaces analogues passeront par son foyer. Donc :

Théorème XIV. — *Étant donnés six plans qui, considérés quatre à quatre, forment quinze tétraèdres, dans chacun d'eux il existe une surface lieu des centres des surfaces du second degré qui passent par les centres des huit sphères qui lui sont inscrites; ces quinze surfaces passent par un même point.*

A ces dernières propositions correspondent les théorèmes de Géométrie plane connus :

Quand un triangle est circonscrit à une parabole, le cercle circonscrit à ce triangle passe par le foyer.

Les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles de quatre droites quelconques, considérées trois à trois, passent par un même point, foyer de la parabole tangente aux quatre droites.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 398

(voir tome XVI, page 390);

PAR M. RAFAELE RUBINI.

Soient donnés un tétraèdre quelconque abcd et dans son intérieur un point o tel, que les droites oa, ob, oc déterminent un angle trirectangle; je prolonge les droites oa, ob, oc, od jusqu'en a', b', c', d' où elles coupent les faces opposées aux points a', b', c', d'. On a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{oa'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{ob}+\frac{1}{ob'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{oc}+\frac{1}{oc'}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2}.$$

(MANNHEIM.)

Prenons le point o pour origine et les droites oa, ob, oc, qui déterminent un angle trirectangle, pour direction des axes des x, des y et des z positifs. Posant

$$\frac{1}{oa}=m,\quad \frac{1}{ob}=n,\quad \frac{1}{oc}=p,$$

l'équation de la face abc sera

$$mx+ny+pz=1.$$

Pour avoir les équations des autres faces, il suffit d'observer que le quatrième sommet d doit se trouver nécessairement dans l'angle trièdre des x, y, z négatifs, pour que le point o tombe, suivant l'hypothèse, dans l'intérieur du tétraèdre. Soient donc $-x_0$, $-y_0$, $-z_0$ les coordonnées de ce point d, on aura pour équation des faces bcd,

acd, abd respectivement

$$\frac{x}{x_0} = -\frac{1-ny-pz}{1+ny_0+pz_0}, \quad \frac{y}{y_0} = -\frac{1-mx-pz}{1+mx_0+pz_0},$$

$$\frac{z_0}{z_0} = -\frac{1-mx-ny}{1+mx_0+ny_0}.$$

De là nous déduirons, pour les valeurs absolues des distances à l'origine,

$$(1)\ oa' = \frac{x_0}{1+ny_0+pz_0}, \quad ob' = \frac{y_0}{1+mx_0+pz_0}, \quad oc' = \frac{z_0}{1+mx_0+ny_0};$$

on a d'ailleurs

$$od = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$

et, pour avoir od', il suffit d'observer que les équations de la droite indéfinie bb' sont

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Ces équations combinées avec les équations (1) donnent pour l'ordonnée z du point d'

$$z = \frac{z_0}{mx_0+ny_0+pz_0}, \quad \text{et, par suite,} \quad od' = \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}{mx_0+ny_0+pz_0}.$$

D'après tout cela, on a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{oa'}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{ob}+\frac{1}{ob'}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{oc}+\frac{1}{oc'}\right)^2}$$

$$= \frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{(1+mx_0+ny_0+pz_0)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} + \frac{mx_0+ny_0+pz_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\right)^2} = \left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2,$$

C. Q. F. D.

Question 711-I

PAR M. AUDOYNAUD,
Professeur au lycée de Poitiers.

En désignant par x_r, y_r, z_r les coordonnées d'un point a_r, on a, pour un point quelconque O,

$$\begin{vmatrix} \overline{Oa_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \overline{Oa_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \overline{Oa_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \overline{Oa_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \overline{Oa_5}^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \text{const.}$$

Lorsque les points a_r sont sur une sphère, on sait que ce déterminant est nul. (FAURE.)

Supposons les axes rectangulaires, et soient α, β, γ les coordonnées variables du point O; on a

$$(\alpha - x_r)^2 + (\beta - y_r)^2 + (\gamma - z_r)^2 = \overline{Oa_r}^2$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha x_r - 2\beta y_r - 2\gamma z_r + R_r^2 - \overline{Oa_r}^2 = 0,$$

en appelant R_r la distance du point a_r à l'origine. On obtient ainsi cinq équations en faisant successivement $r = 1, 2, 3, 4, 5$, et l'élimination des quatre quantités $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, -2α, -2β, -2γ, donne

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & R_1^2 - \overline{Oa_1}^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & R_2^2 - \overline{Oa_2}^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & R_3^2 - \overline{Oa_3}^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & R_4^2 - \overline{Oa_4}^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & R_5^2 - \overline{Oa_5}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \overline{Oa_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \overline{Oa_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \overline{Oa_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \overline{Oa_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \overline{Oa_5}^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ R_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ R_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ R_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ R_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6(R_1^2 v_1 - R_2^2 v_2 + R_3^2 v_3 - R_4^2 v_4 + R_5^2 v_5) = \text{const.}$$

J'appelle v_1 le volume du tétraèdre $a_2 a_3 a_4 a_5$, v_2 celui du tétraèdre $a_1 a_3 a_4 a_5 \ldots$.

Si les points a_r sont sur une sphère et que l'origine des coordonnées en soit le centre, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 sont égaux, et le dernier déterminant sera nul, puisqu'en mettant R^2 en facteur deux colonnes seront identiques.

Note. — MM. F. Richard, élève du collége Chaptal (classe de M. Amiot), Le Bel et Talayrach, du lycée Charlemagne, Rezzonico et le P. Autefage, S. J., ont donné une démonstration exacte, mais un peu moins simple.

Question 711-IV;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon,

Une équation de la forme

$$(1)\ \begin{cases} F(a)x^m + F(a+1)x^{m-1} + \ldots + F(a+r)x^{m-r} + \ldots \\ \quad \ldots + F(a+m-1)x + F(a+m) = 0, \end{cases}$$

dans laquelle $F(a)$ *désigne une fonction algébrique du degré* $m-2$ *au plus, a toujours des racines imaginaires.*

(FAURE.)

1. Soit $m-s$ le degré de $F(a)$, $s \geqq 2$, l'équation

$$(2)\ (x-1)^{m-s+1}[F(a)x^m + \ldots + F(a+r)x^{m-r} + \ldots + F(a+m)] = 0$$

ne peut avoir de racines imaginaires qu'autant que

l'équation (1) elle-même en a : en développant les calculs, on trouve que les coefficients des termes de degré m, $(m-1)$, ..., $(m-s+1)$ sont les différences d'ordre $m-s+1$ d'une fonction entière de degré $m-s$, différences égales à zéro.

L'équation (2), supposée ordonnée, renferme donc des termes consécutifs nuls en nombre $s \geqq 2$; donc elle a des racines imaginaires.

2. En suivant la même marche, on démontrerait la proposition suivante :

Une équation algébrique, entière, complète et ordonnée, a des racines imaginaires si certains coefficients consécutifs forment une série dont les différences d'ordre inférieur de deux unités au nombre de ses termes soient nulles.

3. On en déduit une proposition énoncée au grand concours de 1842, par M. Hermite, actuellement membre de l'Institut :

Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs forment une progression par différence, l'équation a des racines imaginaires. (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. Ier, p. 385.)

Question 712

(voir 2e série, t. III, p. 444);

PAR M. A. GRASSAT,
Elève du lycée de Lyon.

Une ellipse E *étant donnée, décrire une autre ellipse* E' *concentrique et homothétique à la première, telle que, si d'un point* A *pris arbitrairement sur* E *on mène à* E' *deux tangentes* AM, AN, *rencontrant* E *en des*

points B, C, *la droite* BC *soit tangente à l'ellipse* E'.

Cette condition étant remplie, démontrer que l'aire du triangle ABC *est invariable, ainsi que la somme des distances de ses trois sommets* ABC *à un foyer de l'ellipse donnée* E.

L'équation de la conique donnée étant

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

celle de l'autre sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-k^2=0,$$

et il suffit de déterminer k.

Or, α, β étant les coordonnées du point A, le système des deux tangentes AM, AN est représenté par

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-k^2\right)^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-k^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-k^2\right)$$

ou

$$(2) \qquad \left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}\right)^2+k^4-2k^2\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-k^2\right)(1-k^2)=0,$$

puisque

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1.$$

Multipliant l'équation (1) par $1-k^2$ et ajoutant à l'équation (2), on a

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}\right)^2+k^4-2k^2\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}\right)+(1-k^2)(k^2-1)=0$$

ou

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}\right)^2-2k^2\left(\frac{\alpha x}{a^2}-\frac{\beta y}{b^2}-1\right)-1=0,$$

Même question (solution géométrique);

PAR M. LÉON D'APVRIL,
Élève du lycée de Grenoble.

1. Concevons que l'ellipse donnée soit placée sur un cylindre de révolution; dans le cercle, base de ce cylindre, inscrivons un triangle équilatéral quelconque, et dans ce triangle une circonférence. Le cylindre ayant pour base cette circonférence et parallèle au premier cylindre, sera coupé par le plan de l'ellipse donnée suivant l'ellipse cherchée.

2. Les triangles tangents à l'ellipse intérieure et ayant leurs sommets sur l'ellipse extérieure sont équivalents, car leurs projections sur le plan de la base du cylindre, étant des triangles équilatéraux inscrits dans le même cercle, sont égaux.

3. Si l'on inscrit dans le second cylindre une sphère tangente au plan de l'ellipse, le point F de contact sera le foyer. Les troncs de prismes ayant pour base supérieure les divers triangles inscrits dans l'ellipse et pour base inférieure les projections de ces triangles sur le plan du cercle de contact sont équivalents, comme ayant pour mesure chacun la surface d'un triangle équilatéral multipliée par la distance du centre de l'ellipse au centre du cercle. Or, cette distance est d'une part égale au demi-grand axe de l'ellipse, et d'autre part, en vertu de ce que nous venons de dire, au tiers de la somme des trois arêtes du prisme. Mais chacune de ces arêtes est égale à la distance du sommet du triangle au foyer de l'ellipse. Donc, la somme des distances des trois sommets d'un triangle satisfaisant à la question à un même foyer de l'ellipse, est constante et égale à trois fois le demi-grand axe de l'ellipse.

Note du Rédacteur. — La question 712 se rattache à la belle théorie des polygones simultanément inscrits et circonscrits, due à M. Poncelet. — Autre solution géométrique par MM. Le Bel et Talayrach, élèves du lycée Charlemagne.

Question 713

(voir 2ᵉ série, t. III, p. 444);

PAR MM. DROUARD ET YVER,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

On donne dans l'espace deux droites indéfinies L, L', *non situées dans le même plan, et un point* O. *Décrire de ce point comme centre une sphère qui coupe les droites* L, L', *en des points* A, B, A', B' *tels, que le tétraèdre* AB A'B', *qui a ces points d'intersection pour sommets, soit équivalent à un cube donné* C^3.

Rappelons d'abord que le volume du tétraèdre ABA'B' est représenté par $\frac{1}{6}$ AB.A'B'$h \sin(L, L')$, h étant la plus courte distance des deux droites. Soient r le rayon de la sphère, et d, d' les distances du point donné aux deux droites. On aura

$$AB = 2\sqrt{r^2 - d^2}, \quad A'B' = 2\sqrt{r^2 - d'^2}.$$

On a donc l'équation

$$(1) \qquad 2\sqrt{r^2 - d^2}\sqrt{r^2 - d'^2}\, h \sin(L, L') = 3C^3,$$

ou, en élevant au carré et ordonnant,

$$(2) \quad \begin{cases} 4h^2\sin^2(L, L')\, r^4 - 4h^2\sin^2(L, L')(d^2 + d'^2)\, r^2 \\ \qquad + 4h^2 d^2 d'^2 \sin^2(L, L') - 9C^6 = 0. \end{cases}$$

Pour que les valeurs de r^2 soient réelles, il faut que l'on ait

$$h^2\sin^2(L, L')\,[9C^6 + h^2(d^2 - d'^2)^2 \sin^2(L, L')] > 0.$$

Cette condition est toujours satisfaite.

Soit $d^2 > d'^2$. d^2 est compris entre les deux valeurs de r^2, puisque d^2, mis à la place de r^2 dans l'équation (2), rend le premier membre négatif. La plus grande convient seule. Cette racine est positive. Le problème admet donc toujours une solution, ce qu'on prévoyait à l'avance, et il n'en admet qu'une.

Note. — Autre solution par M. Rezzonico et par MM. Le Bel et Talayrach.

QUESTIONS.

721. On donne sur un plan deux circonférences (O) et (O'). D'un point fixe A de la première on mène une droite ABC qui coupe cette circonférence de nouveau au point B et la circonférence (O') au point C; on porte le segment BC de A en M sur la droite AB : on demande le lieu décrit par le point M, lorsque la droite AB tourne autour du point A. (MANNHEIM.)

722. Par chacun des sommets d'un triangle ABC, on mène une droite parallèle au côté opposé; on désigne par A_1, B_1, C_1 les sommets opposés aux points A, B, C du triangle nouveau formé par ces parallèles; démontrer que le cercle des neuf points du triangle ABC touche les cercles des neuf points des triangles A_1BC, B_1CA, C_1AB au milieu des côtés BC, CA, AB respectivement.

(JOHN GRIFFITHS.)

723. Soient α, β, γ les milieux des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit. Menons $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ et prolongeons ces droites jusqu'en A', B', C', de telle sorte que

$$OA' = 2O\alpha,\quad OB' = 2O\beta,\quad OC' = 2O\gamma.$$

(Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. II, p. 132.)

Démontrer que le cercle des neuf points du triangle ABC passe par les points d'intersection, réels ou imaginaires, de la circonférence circonscrite avec la circonférence conjuguée de chacun des triangles OB'C', OC'A', OA'B', A'B'C'. (JOHN GRIFFITHS.)

BIBLIOGRAPHIE.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES CONVERGENTS DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE, avec ses applications à la détermination : 1° des lignes asymptotiques aux courbes représentées par ces fonctions; 2° de la vraie valeur des fonctions qui se présentent sous une forme indéterminée; suivie d'un examen critique des méthodes usitées pour la résolution de cette dernière question; par *Henri Fleury*, chef d'institution, licencié ès sciences mathématiques.

« Je ne vois que des infinis de toutes parts. » (PASCAL.)

Un *Avertissement* apprend que la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* a refusé d'insérer dans ce journal un article de M. Henri Fleury. L'auteur de l'article trouve que les motifs de ce refus sont entièrement dénués de bon sens; en outre, les objections des rédacteurs du journal lui semblent être en contradiction, et à cet égard sa conviction se fonde sur ce que : il n'entend rien aux objections de l'un des rédacteurs, tandis que dans les objections de l'autre il *voit* une *évidente* absurdité (*); l'*Avertissement* ne prévient d'aucune autre chose.

(*) Page xv : « je vois... une évidente absurdité ».

Il est sans doute à regretter que M. Fleury n'ait pas mieux apprécié la raison du refus dont il se plaint, et qu'il lui ait été absolument impossible de la voir dans l'inexactitude du raisonnement de son article. La rédaction des *Nouvelles Annales* n'en est pas responsable, car l'un des rédacteurs, M. Prouhet, a mis à lui montrer cette raison des soins qui n'ont eu pour limite que l'évidence de leur inutilité, comme le prouve suffisamment une correspondance que l'auteur de l'article a livrée au public.

Cette confiance inébranlable de l'auteur dans la rectitude de ses idées scientifiques, secondée peut-être par un désir peu réfléchi de publicité, l'a probablement empêché aussi de se rendre un compte exact de ce qu'il y a d'irrégulier à publier des lettres sans y être autorisé par celui qui les a écrites.

Des précédents de cette nature ne permettent guère d'espérer que l'on puisse parvenir à convaincre M. Fleury de l'erreur qui existe dans ses principes fondamentaux. Aussi, ce n'est pas précisément l'objet que je me propose en répondant à l'*Avertissement*. Mais l'auteur est licencié ès sciences mathématiques, et l'assurance avec laquelle il proclame l'exactitude de ses raisonnements pourrait égarer le jugement de quelques-uns de ceux qui n'ont pas encore fait des études aussi prolongées que les siennes : considéré sous ce point de vue, l'*Avertissement* me semble mériter qu'on s'en occupe.

Page IX, on lit :

« M. Prouhet, qui n'a pas le temps de mettre son objection dans tout son jour (de la tirer au clair), veut » bien prendre le temps de m'en faire une nouvelle ; et, » parce que dans une expression que l'hypothèse $x = \infty$ » réduit à

$$\left(\frac{a-a'}{2}\right)x + \frac{b-b'}{2} - \left(\frac{a-a'}{2}\right)x,$$

» je supprime le premier et le dernier terme QUI SE DÉ-
» TRUISENT, il m'écrit : « Vous faites des calculs sur
» l'infini.... »

Ces lignes renferment une erreur qui a pris la forme d'une vérité toute simple : quand deux termes se détruisent, on peut les supprimer, rien n'est plus certain; seulement, les deux termes dont il s'agit ici ne se détruisent pas, généralement du moins, parce qu'ils ne proviennent que de l'hypothèse $x = \infty$, qui les rend infinis l'un et l'autre, et leur suppression revient à substituer o à $0 \times \infty$, ou, si l'on veut, à remplacer $\infty - \infty$ par o. En voici une démonstration détaillée.

Considérons l'expression

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)}-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x,$$

où δ et ε représentent des fonctions de x qui s'annulent pour $x = \infty$ (*). L'hypothèse $x = \infty$ réduit cette expression à

$$\left(\frac{a-a'}{2}\right)x+\frac{b-b'}{2}-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x,$$

et si, comme l'affirme l'*Avertissement*, le premier et le troisième terme se détruisent, l'expression considérée est nécessairement réduite à $\frac{b-b'}{2}$ par l'hypothèse $x = \infty$: c'est ce qu'il faut bien se garder de croire.

(*) Cette expression comprend, comme cas particulier, la fonction

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\frac{c-c'}{x}+\frac{d-d'}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{d}{x^4}}+\sqrt{1+\frac{a'}{x}+\frac{b'}{x^2}+\frac{c'}{x^3}+\frac{d'}{x^4}}}-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x,$$

considérée dans l'*Avertissement*.

En effet, pour toute valeur finie de x, on a

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)}-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$$
$$=\frac{(b-b')+\delta-\varepsilon(a-a')x}{2(1+\varepsilon)},$$

ou, en posant $\frac{-\varepsilon(a-a')}{1+\varepsilon}=\alpha$,

$$\frac{(a-a')x+(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)}-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x=\frac{(b-b')+\delta}{2(1+\varepsilon)}+\frac{\alpha x}{2}.$$

Cette dernière égalité a lieu, quelque grande que soit la valeur attribuée à x; donc, si le premier membre est réduit à $\frac{b-b'}{2}$ par l'hypothèse $x=\infty$, il en doit être de même du second; or, le second membre se réduit seulement à $\frac{b-b'}{2}+\frac{\alpha x}{2}$, car le terme $\frac{\alpha x}{2}$ ne peut être supprimé puisque α ne devient nul que pour $x=\infty$. Par conséquent, la réduction des deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, dont le premier ne provient que de l'hypothèse $x=\infty$, n'est pas mieux fondée en principe que l'égalité $0\times\infty=0$ (*).

Lorsque x représente une variable dont la valeur croît indéfiniment, les deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$

(*) Prenons pour exemple l'expression $x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}$. L'hypothèse $x=\infty$ réduit cette expression à $x-x$. D'après l'*Avertissement*, les deux termes x, $-x$ se détruisent, donc l'hypothèse $x=\infty$ réduit à *zéro* l'expression considérée. Or, pour toute valeur finie de x, on a évidemment

$$x-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}};\quad \text{et, pour } x=\infty,\quad \frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1:$$

par conséquent la réduction des deux x, $-x$ conduit à l'égalité $1=0$.

se détruisant, quelque grande que soit la valeur *finie* de x, on peut dire qu'ils se détruisent encore à la limite $x = \infty$; mais ce n'est pas le cas d'une expression dont la réduction à la forme

$$\left(\frac{a-a'}{2}\right)x + \frac{b-b'}{2} - \left(\frac{a-a'}{2}\right)x$$

a seulement lieu pour $x = \infty$; et, supprimer alors les termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, c'est, comme le fait observer M. Prouhet, étendre à des expressions qui ne représentent aucune quantité finie les règles du calcul des quantités finies. Peu importe à l'auteur de l'*Avertissement* : il ne voit aucune différence entre ces deux cas, et c'est lui-même qui en prévient (page x) :

« Les deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$ se dé-
» truisent évidemment, quelque valeur, même infinie,
» qu'on suppose à x. Admettons qu'opérer cette réduc-
» tion, ce soit faire des calculs sur l'infini ; alors je fais, je
» l'avoue, des calculs sur l'infini, et je n'ai pas le mérite
» d'être le premier. Ouvrez le *Cours d'Analyse* de
» M. Duhamel, et vous pourrez lire à la page 13 (1847) :
« On parle souvent des quantités infinies ; on les
» soumet aux mêmes opérations que les quantités finies,
» et *il est très-important de ne pas se méprendre sur*
» *la manière dont ce langage doit être entendu.* »

C'est précisément en cela que M. Fleury s'est mépris, et sa méprise tient peut-être à ce qu'il a seulement eu égard à ces mots : « On parle souvent... » ; mais le passage du *Cours d'Analyse* qu'on a cité ne commence pas ainsi, et le commencement mérite bien d'être rapporté ; nous le rétablissons ici :

« Le mot *infini* est employé pour exprimer l'absence
» de limite, de borne quelconque : c'est ainsi que l'espace

» et le temps sont dits infinis. *Cette idée exclut évidem-
» ment celle de toute comparaison sous le rapport de la
» grandeur*. Néanmoins, pour abréger le discours, on
» parle souvent, etc. ».

On conçoit que ce commencement ne pouvait servir à justifier la réduction des quantités infinies désignées par les deux termes $\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, $-\left(\frac{a-a'}{2}\right)x$, à moins toutefois d'admettre que l'idée de réduire ces deux quantités *exclut évidemment celle* d'en comparer les grandeurs.

Au reste, le calcul précédemment indiqué (p. 89 et 90) démontre que cette réduction est illusoire, et tout raisonnement qui conduit à une conclusion contraire est, par cela même, un raisonnement erroné.

C'est pourquoi la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* a dû refuser d'insérer dans ce journal l'article de M. Fleury. Nous regrettons que l'auteur de l'article, en informant le public de ce refus, nous ait obligé d'en faire connaître le motif. G.

CORRESPONDANCE.

1. Dans la Notice sur Sturm placée en tête du Ier volume du *Cours d'Analyse*, 2e édition, nous avons attribué à Sturm un théorème sur la quantité dont varie la force vive d'un système de points dans lequel les liaisons sont changées à un instant donné. Un correspondant nous fait remarquer que ce théorème appartient à M. Duhamel, qui l'a démontré incidemment dans une Note présentée à l'Académie des Sciences en 1832 et insérée en 1835 dans le tome XV du *Journal de l'École Polytechnique*.

Notre correspondant a parfaitement raison, et si nous n'avons pas reconnu les droits de M. Duhamel dans la Notice réimprimée en 1863, comme nous l'avions déjà fait dans le tome II de la *Mécanique* de Sturm (1861, p. 353), c'est un pur oubli de notre part. Nous n'avons jamais eu l'intention de contester les travaux d'un savant dont nul plus que nous n'estime le talent et le caractère.

2. MM. Haag et Brisse ont résolu, tome III, p. 170, une question relative à une infinité de limaçons de Pascal ayant même point double et même cercle générateur. M. Léon Dyrion, aujourd'hui élève de l'École Polytechnique, fait observer que ce théorème se démontre très-simplement en opérant la transformation de la figure par rayons vecteurs réciproques, le point double commun étant pris pour pôle de transformation. Les limaçons se transforment en ellipses de même foyer et de même directrice, et l'on retombe sur des propriétés connues des sections coniques.

3. M. Bertrand nous écrit : « Comment avez-vous pu croire au passage de Whiston cité par Arago (*)? Il est absurde, comme vous le dites, mais Whiston ne l'a jamais écrit. Voici le texte : *I should not have thought proper to publish it during his life's time, because I knew his temper so well that I should have expected it would have killed him* (**). Traduisez et jugez. On a transformé un acte de déférence en une odieuse et absurde accusa-

(*) *Voir* t. III, 2e série, p. 552, *note*.

(**) C'est-à-dire : « Je n'aurais pas cru convenable de publier cet ouvrage (la réfutation de la chronologie de Newton) pendant sa vie, car je connaissais assez son tempérament pour craindre que cela ne le tuât. » (WHISTON, *Memoirs of his life*. London, 1753; p. 251). Whiston exagérait peut-être la susceptibilité de Newton, qui atteignit l'âge de quatre-vingt-cinq ans, et ne peut point être considéré comme ayant eu une existence abrégée par les critiques de ses ennemis.

tion. » Nous remercions M. Bertrand de cette nouvelle confirmation de l'axiome : *traduttore, traditore*. Whiston a donc été trahi par ses traducteurs, cela est incontestable. Si nous avons admis la phrase attribuée à Whiston, c'est sur l'autorité de Delambre et d'Arago, qui sans doute n'ont pas commis le contre-sens signalé, mais l'ont propagé sans remonter aux sources et en manifestant quelques doutes timides sur la véracité de Whiston (*).

Les *Mémoires de Whiston* nous donnent de ce dernier l'idée d'un homme vaniteux, tracassier, à idées étroites. Newton a pu se brouiller avec un ami de ce calibre sans qu'il y ait eu nécessairement de sa faute. Newton n'avait pas voulu que Whiston fût de la Société Royale : sans doute qu'il ne l'en jugeait pas digne. De là probablement la rancune de ce dernier, dont la vanité était profondément blessée.

4. M. le Dr Angelo Forti, professeur au lycée de Pise, nous adresse une longue lettre au sujet de la critique de ses *Tables* faite par M. Hoüel (t. III, 2e série, p. 416). M. Forti reconnaît une partie des inconvénients signalés

(*) « Voici, dit Arago, un autre passage emprunté à ce même Whiston, et qui, *en le supposant véridique*, donnerait une *singulière* idée des sentiments intimes de Newton.... » (*Œuvres d'Arago*, t. III, p. 324.)

P. S. Une comparaison plus attentive des textes m'a montré une assez grande différence entre la version d'Arago et celle de Delambre. Arago dit : « D'après la connaissance que j'avais de *ses habitudes*, j'aurais dû craindre qu'il ne me tuât. » Delambre met simplement : « D'après la connaissance que j'avais de son caractère, etc. » Ici du moins, si Newton est encore considéré comme capable de tuer un critique, il n'est pas donné comme coutumier du fait. Au reste, je dois ajouter que Delambre n'a pas pris le passage attribué à Whiston dans l'ouvrage de celui-ci, mais dans une brochure d'un nommé Prescot, qui, en 1822, cherchait à renverser les systèmes de Copernic et de Newton. Il est probable que Prescot a cité inexactement Whiston, et le tort de Delambre est de s'en être rapporté à un auteur si peu digne de foi.

par M. Hoüel, et s'occupe à les faire disparaître dans un nouveau travail. Mais, contrairement à l'avis du savant professeur, il pense que le double secteur circulaire φ pouvait être pris pour argument. Voici comment M. Forti s'exprime à ce sujet :

« Mes Tables ne sont pas destinées à donner seulement les fonctions hyperboliques, mais les *circulaires* et les *hyperboliques*, comme il résulte de leur titre.

» Mes Tables ont été faites dans le but de remplacer les Tables circulaires que nous avions; et suivies, comme elles devaient être, des *logarithmes des nombres* depuis 1 jusqu'à 1000, elles devaient offrir dans un petit volume, un peu plus gros que celui de Lalande, un système complet des Tables des logarithmes.

» Par cette idée, le φ était l'argument le plus propre.

» Mes Tables ne sont pas suivies des logarithmes des nombres, parce qu'elles ont été publiées dans les *Annales de l'Université de Toscane*. Dans une nouvelle édition et dans un format plus petit, chaque éditeur pourra les ajouter à la fin du volume.

» En outre, le φ a une signification géométrique très-claire et très-simple; les fonctions qui lui appartiennent dans le cercle correspondent évidemment avec celles de l'hyperbole équilatérale.

» Au contraire, *l'angle transcendant* τ a en lui-même quelque chose d'artificiel, et, pris pour *argument* dans le système des Tables, il peut jeter sur elles de l'obscurité, surtout dans la tête des jeunes étudiants.

» M. le professeur Mossotti, en m'encourageant à conserver le φ pour argument, attachait une très-grande importance à ce que l'on ne perdît pas de vue le lien géométrique des deux espèces de fonctions, lien par lequel on passe avec un trait de plume des formules qui appartiennent aux premières à celles qui appartiennent

aux secondes. C'est ce que je prouve dans ma préface par l'application de la *chute des corps dans un milieu résistant.* »

5. M. Léon Sancery, professeur au lycée d'Auch, nous signale comme incomplète et inexacte la solution, donnée à la page 474 de notre dernier volume, de la question posée au concours général des lycées et des colléges. Faute d'avoir énuméré tous les cas, l'auteur de cet article croit que le problème admet deux solutions au plus, tandis qu'il peut y en avoir jusqu'à quatre. Nous remercions M. Sancery de sa communication, mais nous regrettons de ne pouvoir insérer la solution très-complète et fort bien rédigée qu'il nous adresse. La question est longue, d'un faible intérêt scientifique, et nous avons tant de matériaux! Le même motif nous a fait écarter un excellent article sur le même sujet dû à M. Lac de Boredon, professeur au lycée du Puy.

A propos de la même question, un abonné de Marseille exprime en termes fort vifs son étonnement de ce que nous ayons inséré une solution aussi incomplète, et il nous envoie sa propre solution pour nous convaincre, dit-il, que la question n'avait pas réellement été traitée! Merci. M. D. résout fort bien les problèmes, mais ne pourrait-il pas, à un si beau talent, joindre un peu d'indulgence et être moins dur au pauvre monde? Les rédacteurs veulent bien se mettre au service du public; mais, s'ils ne se montrent pas difficiles pour les gages, en revanche, ils demandent à être traités poliment. Est-ce trop exiger?

P.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES SURFACES

(voir p. 62);

PAR M. A. PICART,
Professeur au lycée Charlemagne.

III. — SURFACE A LIGNES DE COURBURE CIRCULAIRES.

10. Une surface, dont toutes les lignes de courbure sont des cercles, peut être considérée comme l'enveloppe de deux séries de sphères touchant respectivement la surface suivant deux systèmes de cercles perpendiculaires entre eux. Or, il est clair que chaque sphère appartenant à l'un des modes de génération est tangente à toutes les sphères de l'autre système. D'ailleurs, la condition d'être tangente à trois sphères fixes détermine complétement les positions successives d'une sphère mobile. Donc, la surface à lignes de courbure circulaires peut être regardée comme l'enveloppe des positions d'une sphère tangente à trois autres.

C'est par ce mode de génération que M. Dupin a défini, le premier, la surface à lignes de courbure circulaires à laquelle il a donné le nom de *cyclide*.

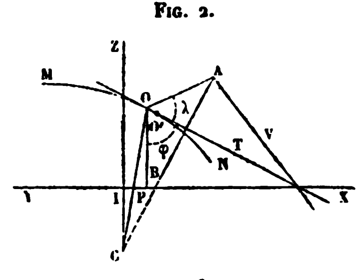
Nous nous proposons ici de rattacher la génération de cette surface aux propriétés générales des surfaces à lignes de courbure planes.

11. Une surface dont les lignes de courbure d'un système sont des cercles, pouvant être regardée comme l'enveloppe d'une série de sphères, cherchons sur quelle ligne doivent être situés les centres des sphères enveloppées, et quelle loi de variation doit suivre le rayon de ces sphères pour que le second système de lignes de courbure de la surface soit aussi circulaire.

12. Exprimons d'abord que les lignes de courbure du second système sont planes. Il faut et il suffit : 1° que les plans des lignes de courbure du premier système soient parallèles à une même droite; 2° que ces plans coupent la surface sous un angle dont le cosinus soit proportionnel au cosinus de l'angle qu'ils forment avec un plan parallèle à la droite (comme je l'ai démontré ailleurs, *Essai d'une théorie géométrique des surfaces*, 3e partie). La première condition exige que les centres des sphères enveloppées soient sur une courbe plane. La seconde va servir à déterminer la loi de variation du rayon de ces sphères.

Soit MN (*fig.* 2) le lieu des centres des sphères enve-

Fig. 2.



loppées. Considérons deux sphères consécutives ayant pour centres O et O'; elles se coupent suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à la tangente OT : soit AB le diamètre de ce cercle qui est dans le plan de la courbe MN. L'angle sous lequel le plan du cercle coupe la surface est égal à AOT. Il faut que le cosinus de cet angle soit proportionnel au cosinus de l'angle que le plan du cercle forme avec une certaine ligne XY située dans le plan de la courbe MN. Désignons par R le rayon de la sphère mobile, par z l'ordonnée OP de la courbe MN relativement à XY, par λ l'angle que le plan du cercle forme avec la surface, et par φ l'angle de ce plan avec XY : nous

avons

$$dR = -OO' \cos\lambda,$$
$$dz = -OO' \cos\varphi,$$

d'où

$$\frac{dR}{dz} = \frac{\cos\lambda}{\cos\varphi} = \text{const.} = m,$$

d'où enfin

$$(3) \qquad R = mz + m',$$

m' étant une constante.

On peut toujours supposer cette constante nulle : cela revient à transporter la ligne XY parallèlement à elle-même. Donc, *la surface enveloppe d'une sphère mobile aura toutes ses lignes de courbure planes, si le centre de la sphère se déplace sur une courbe plane et si le rayon de cette sphère varie proportionnellement à l'ordonnée de cette courbe par rapport à un axe quelconque* XY *situé dans son plan.*

On sait qu'en général les plans des lignes de courbure des deux systèmes sont respectivement parallèles à une même droite. Mais ici, il y a plus. *Les plans des lignes de courbure non circulaires passent tous par l'axe* XY. En effet, la relation $\frac{z}{\cos\varphi} = \frac{R}{\cos\lambda}$ exprime que la perpendiculaire AV au rayon OA rencontre la tangente OT sur l'axe XY. Les lignes de courbure circulaires peuvent donc être regardées comme appartenant à des sphères dont les centres sont sur la droite XY, et qui coupent la surface orthogonalement; par suite, d'après un théorème connu, les plans des lignes de courbure de l'autre système passent par l'axe XY (*).

(*) Ces surfaces à lignes de courbure circulaires dans un système et planes dans l'autre ont été étudiées pour la première fois par M. O. Bonnet

13. Exprimons maintenant que les lignes de courbure du second système sont aussi des cercles.

Il faut et il suffit que les plans des cercles du premier système passent par une même droite.

Cette condition est nécessaire, d'après le numéro précédent; de plus, elle est suffisante, car on sait que lorsque les lignes de courbure d'un système sont dans des plans passant par une même droite, les lignes de courbure de l'autre système sont sphériques; or, ces dernières sont déjà planes : elles sont donc circulaires.

Soit C le point du plan de la courbe MN par lequel passent les plans des lignes de courbure du premier système. Menons par ce point une perpendiculaire IZ à la droite XY; prenons ces deux droites pour axes de coordonnées, et désignons par x, z les coordonnées d'un point quelconque O de la courbe MN par rapport à ces deux axes.

Comme les plans des cercles d'intersection successive des sphères passent par le point C, les tangentes à toutes ces sphères, menées par le point C, sont égales. On a donc, en appelant k la longueur commune de ces tangentes et ρ le rayon vecteur CO,

(4) $$\rho^2 = R^2 + k^2.$$

Mais, d'autre part,

$$R = mz,$$
$$\rho^2 = x^2 + (z - d)^2,$$

d étant la distance du point C à l'axe XY. Substituant les valeurs de ρ^2 et de R dans l'équation (4), on obtient

(5) $$x^2 + (1 - m^2) z^2 - 2dz + d^2 - k^2 = 0.$$

---

dans un Mémoire remarquable *sur les surfaces à lignes de courbure planes et sphériques* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVe cahier).

C'est là l'équation de la courbe MN, lieu des centres des sphères enveloppées.

Cette équation représente une ligne du second ordre : une ellipse si m est < 1, une hyperbole si m est > 1, et une parabole si $m = 1$.

Remarquons que m est l'excentricité de la courbe.

De là résulte le mode de génération suivant de la surface cyclique :

La cyclide peut être regardée comme l'enveloppe des positions d'une sphère mobile dont le centre se déplace sur une courbe du second ordre et dont le rayon varie proportionnellement à la distance du centre à une droite fixe XY *perpendiculaire à l'un des axes de la courbe, le coefficient de proportionnalité étant l'excentricité de cette courbe.*

14. Il nous reste à bien préciser ce mode de génération en discutant successivement les trois formes que peut présenter le lieu des centres des sphères enveloppées.

1° *Ellipse* $(m < 1)$.

Dans ce premier cas, la droite XY est évidemment perpendiculaire à l'axe focal.

Nous la supposerons d'abord extérieure à l'ellipse

$$(d^2 - k^2 > 0).$$

15. Désignons par z_1, z_2 les ordonnées des sommets A, A′ de la courbe situés sur l'axe focal. Le plan de cette courbe coupe la surface suivant deux cercles que nous appellerons *cercles principaux*. Ces deux cercles ont leurs centres sur l'axe AA′, et rencontrent cet axe en des points dont les ordonnées sont, pour l'un,

$$(1 - m)\, z_1, \quad (1 + m)\, z_2,$$

et, pour l'autre,

$$(1+m)z_1, \quad (1-m)z_2.$$

Les ordonnées de leurs centres sont, par conséquent,

$$\frac{(1-m)z_1+(1+m)z_2}{2}, \quad \frac{(1+m)z_1+(1-m)z_2}{2},$$

ou

$$\frac{z_1+z_2}{2}+\frac{m(z_2-z_1)}{2}, \quad \frac{z_1+z_2}{2}-\frac{m(z_2-z_1)}{2}.$$

Or, $\frac{z_1+z_2}{2}$ est l'ordonnée du centre de l'ellipse, $\frac{z_2-z_1}{2}$ est le demi-axe focal, et m est l'excentricité; donc *les cercles principaux ont pour centres les foyers de l'ellipse.*

On peut d'ailleurs le reconnaître d'une autre manière, en remarquant que l'ellipse est parcourue par le centre d'un cercle mobile qui reste tangent aux cercles principaux, et en se rappelant que le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés est une courbe du second ordre ayant pour foyers les centres des deux cercles.

16. Comme les cônes circonscrits à la surface le long des lignes de courbure circulaires du premier système ont leur sommet sur la droite XY, d'après le n° 12, il s'ensuit que *la droite* XY *est l'axe radical des cercles principaux.*

17. Quant au point C, par lequel passent les plans des lignes de courbure du premier système, il n'est autre que le point fixe de l'axe focal par lequel passent les cordes de contact des tangentes aux cercles principaux, menées par un point quelconque de l'axe radical de ces cercles. On reconnaît sans peine que *le point* C *divise la distance des centres* F *et* F' *des cercles principaux dans le rapport de leurs rayons,* en d'autres termes, que *le point* C *est le centre de similitude interne des deux cercles principaux.*

18. De là une construction très-simple de la surface. *Que l'on décrive deux cercles intérieurs l'un à l'autre, que par leur centre de similitude interne on mène des transversales, et que sur les portions de ces transversales interceptées par les deux cercles, comme diamètres, on décrive des circonférences dans des plans perpendiculaires au plan de ces cercles, le lieu de toutes ces circonférences est une surface à lignes de courbure circulaires.*

Ces circonférences constituent le premier système de lignes de courbure. Quant aux lignes de courbure du second système, leurs plans passent par l'axe radical des deux cercles.

19. Remarquons que *les perpendiculaires élevées au milieu des segments qu'interceptent les deux cercles sur les transversales enveloppent une ellipse qui a pour foyers les centres de ces cercles.*

20. Les lignes de courbure du second système de la surface sont les intersections successives d'une seconde série de sphères. *Les centres de ces sphères sont aussi sur une conique,* et l'on voit facilement que cette conique, située dans un plan perpendiculaire au plan de l'ellipse, a pour sommets les foyers et pour foyers les sommets de cette ellipse. Dès lors, *le lieu des centres est une hyperbole.*

Le coefficient m', relatif aux sphères du second système, est réciproque de m, et la droite $X'Y'$, analogue à XY, est, pour ces sphères, la perpendiculaire au plan de l'ellipse menée par le point C.

21. Si la droite XY est tangente à l'ellipse, les cercles principaux sont tangents intérieurement. Si la droite XY rencontre l'ellipse, les deux cercles principaux se coupent

sur cette droite Sauf ces circonstances particulières, la construction de la surface reste la même.

2° *Hyperbole* ($m > 1$).

22. Comme le lieu des centres des sphères du second système est une ellipse, ce cas rentre dans le précédent.

Mais il y a à examiner si, dans le cas de l'hyperbole, la droite XY doit toujours être perpendiculaire à l'axe focal de la courbe.

Pour cela, nous résoudrons la question suivante :

Le centre d'un cercle se meut sur une courbe du second ordre qui, rapportée à l'un de ses axes comme axe des x, et à une perpendiculaire à cet axe comme axe des y, a pour équation

$$x^2 + (1 - m^2)y^2 + 2Ay + B = 0;$$

le rayon de ce cercle en chaque point de la courbe est égal à l'ordonnée de ce point multipliée par l'excentricité m. Quelle est l'enveloppe de ce cercle mobile?

Nous avons déjà reconnu indirectement, par les considérations géométriques qui précèdent, la nature de cette enveloppe, dans le cas où l'axe des x est perpendiculaire à l'axe focal de la courbe. Mais l'analyse seule peut nous éclairer sur le cas où l'axe des x est perpendiculaire à l'axe non transverse de l'hyperbole.

Le procédé analytique bien connu, que l'on applique à la recherche des enveloppes, conduit à l'équation

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[(X^2 + Y^2)\sqrt{1 - m^2} + \frac{2AY}{\sqrt{1 - m^2}} + B\sqrt{1 - m^2}\right]^2 \\ &\qquad - 4m^2Y^2\left[\frac{A^2 - B(1 - m^2)}{1 - m^2}\right] = 0, \end{aligned} \right.$$

qui se décompose en deux, savoir :

$$(7)\quad X^2 + Y^2 + \frac{2\left(A + m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}\right)}{1 - m^2} Y + B = 0;$$

$$(8)\quad X^2 + Y^2 + \frac{2\left(A - m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}\right)}{1 - m^2} Y + B = 0.$$

Ces équations représentent deux cercles dont les centres, situés sur l'axe des y, ont pour ordonnées

$$-\frac{A + m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}}{1 - m^2},$$

et

$$-\frac{A - m\sqrt{A^2 - B(1 - m^2)}}{1 - m^2}.$$

Pour que ces ordonnées soient réelles, il faut que $A^2 - B(1 - m^2)$ soit > 0; or, c'est là la condition pour que l'axe des y rencontre la courbe; on voit donc que l'enveloppe n'est réelle, dans le cas de l'hyperbole, que lorsque la droite XY est perpendiculaire à l'axe focal.

De plus, on vérifie facilement que les ordonnées des centres ne sont autres que celles des foyers de la courbe.

Remarque. — De ce fait général, que pour l'ellipse et l'hyperbole, dans le cas où la droite XY est perpendiculaire à l'axe focal, les cercles enveloppes ont pour centres les foyers de la courbe, nous aurions pu induire que, dans le cas où la droite XY est perpendiculaire au petit axe de l'ellipse ou à l'axe non transverse de l'hyperbole, l'enveloppe est imaginaire, car la définition analytique des foyers donne deux foyers imaginaires sur l'axe non transverse de l'hyperbole comme sur le petit axe de l'ellipse. Mais il n'était pas inutile, pour plus de certitude, de vérifier ce résultat par l'analyse.

3° *Parabole* ($m = 1$).

23. Soit d'abord $d^2 - k^2 > 0$: la droite XY est extérieure à la parabole.

L'un des cercles principaux se réduit à la droite XY. L'autre a pour centre le foyer de la courbe et pour rayon la différence entre la distance de ce foyer à la droite XY et le paramètre de la parabole.

Quant au point C, il est à l'intersection de ce cercle avec l'axe focal.

24. De là la construction suivante :

Si l'on considère un cercle et une droite extérieure, qu'on prenne l'un des points où la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la droite rencontre ce cercle, que par ce point on mène une série de transversales, et que sur les portions de ces transversales interceptées par la droite et le cercle, comme diamètres, on décrive des circonférences dans des plans perpendiculaires au plan du cercle, le lieu de toutes ces circonférences est une surface à lignes de courbure circulaires.

25. Remarquons que les perpendiculaires élevées au milieu des segments qu'interceptent sur les transversales la droite et le cercle enveloppent une parabole qui a pour foyer le centre du cercle et pour paramètre la distance minimum ou maximum de ce cercle à la droite.

26. Les sphères du second système ont également leurs centres sur une parabole située dans un plan perpendiculaire à celui de la première, et ayant pour foyer le sommet et pour sommet le foyer de cette première parabole.

27. Si la droite XY rencontre la parabole, le cercle principal passe par les points d'intersection. La surface

est alors composée de deux parties : l'une fermée et limitée dans le plan de la courbe par la droite XY et l'arc de cercle qu'elle sous-tend, l'autre à nappes infinies.

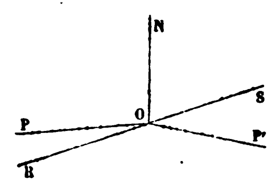
28. Les surfaces qui constituent le système triple orthogonal du § II appartiennent à cette dernière catégorie de surfaces cycliques. Considérons, par exemple, la surface relative au point A, n° 6, et désignons par α la distance OA, par b la demi-distance focale de la section principale située dans le plan XOY, et par c la demi-distance focale de la section principale située dans le plan XOZ (nous supposerons $c > b$); du point A, menons des tangentes à la conique excentrique située dans le plan XOY, la corde de contact MN de ces tangentes appartient à la surface; cette corde est à une distance du centre égale à $\frac{c^2}{\alpha}$. Les plans de tous les cercles d'un système passent par la droite MN. Quant aux plans des cercles de l'autre système, qui sont perpendiculaires au plan XOY, ils passent par le point A_1 de l'axe OX, situé à une distance du centre égale à $\frac{b^2}{\alpha}$.

L'arc parabolique sur lequel sont situés les centres des sphères qui ont la surface pour enveloppe est décrit sur la corde MN, et passe par le milieu de la portion de l'axe OX comprise entre le point A et cette corde. Le paramètre de cette parabole est égal à $\frac{c^2 - b^2}{\alpha}$.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES;

PAR M. FAA DE BRUNO.

THÉORÈME I. — *Soient* P, P′ *deux points situés sur*



deux plans se coupant le long de la ligne RS. *La ligne la plus courte entre ces deux points, en passant par l'intersection* RS, *sera la ligne* POP′, *qui fait des angles égaux* POR = SOP′ *avec la droite* RS. Ceci est connu.

THÉORÈME II. — *Soit* ON *l'intersection du plan* POP′ *avec le plan normal en* O *à la droite* RS; *la droite* ON *fera des angles égaux avec* OP *et* OP′, *c'est-à-dire avec les portions du chemin le plus court.*

Considérons en effet les deux trièdres OSNP′ et ORPN. Ils ont deux faces égales

NOS = NOR = 90 degrés,
RPO = POS, d'après le théorème I;

ensuite les angles dièdres formés sur l'arête commune ON par les plans PNP′, RNS sont pareillement égaux. Donc ces trièdres seront égaux, et l'on aura

PON = NOP′.

C. Q. F. D.

Remarque. — Quand les deux plans RSP, RSP′ sont infiniment rapprochés, c'est-à-dire juxtaposés, la proposition se confond avec celle très-connue des rayons incidents et réfléchis.

Supposons maintenant que les points P, P′ soient situés sur une surface, et que les plans proposés lui soient tangents. Quand ces points seront infiniment rapprochés, la droite RS deviendra tangente à la surface en O, et les deux éléments PO, P′O se confondront avec la tangente en O à la surface suivant le plan POP′. Alors la droite ON, devant être perpendiculaire à la tangente RS par construction, et à la tangente POP′ (car d'après le théorème II elle ne doit cesser, même à la limite, de faire des angles égaux avec les deux éléments de la tangente), sera normale à la surface en O. Donc le plan osculateur d'une ligne géodésique sur une surface est normal à la surface.

SUR UNE MÉTHODE D'ABEL POUR DÉTERMINER LA RACINE COMMUNE A DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. G. D., ABONNÉ.

Abel, dans un Mémoire inséré au tome XVII des *Annales de Gergonne,* a donné une méthode pour déterminer la racine commune à deux équations. Cette méthode a été exposée complétement par M. Serret dans son *Algèbre supérieure,* 2ᵉ édition, p. 57. Il me semble qu'une remarque bien simple, qui ne se trouve pas dans le Mémoire d'Abel, permet d'abréger l'exposé de la méthode et d'obtenir diverses expressions de la racine commune aux deux équations. Je conserve les notations de

M. Serret. Soient

$$(1)\quad f(y) = y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

$$(2)\quad F(y) = y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_{n-1} y + q_n = 0,$$

les deux équations qui ont une racine commune; soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les n racines de l'équation (2). Supposons que y_1 soit la racine commune aux deux équations. Portons ces racines dans le premier membre de l'équation (1), nous aurons les résultats

$$f(y_1),\ f(y_2), \ldots,\ f(y_n),$$

et le premier de ces résultats $f(y_1)$ sera nul. Formons les produits de tous ces résultats pris $n-1$ à $n-1$, et désignons par R_μ celui des résultats qui ne contient pas $f(y_\mu)$. R_μ sera une fonction symétrique des racines $y_1, \ldots, y_n$, excepté y_μ, c'est-à-dire des racines de l'équation

$$\frac{F(y)}{y - y_\mu} = 0.$$

On pourra donc ramener R_μ à une fonction rationnelle et entière de y_μ, fonction qu'on pourra même réduire à une fonction de degré $n-1$,

$$R_\mu = \rho_0 + \rho_1 y_\mu + \ldots + \rho_{n-2} y_\mu^{n-2} + \rho_{n-1} y_\mu^{n-1}.$$

C'est ici que nous proposons une modification à la marche adoptée par Abel. Remarquons que toutes les quantités R_μ, excepté R_1, sont nulles, parce qu'elles contiennent $f(y_1)$ en facteur. Donc, si l'on remplace y_μ par y et si l'on égale R_μ à zéro, l'équation

$$\rho_0 + \rho_1 y + \ldots + \rho_{n-2} y^{n-2} + \rho_{n-1} y^{n-1} = 0$$

aura pour racines toutes les racines de l'équation (2),

excepté y_1. Dès lors, il est bien facile de trouver y_1. Par exemple, on a

$$y_2+y_3+\ldots+y_n=-\frac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}},$$

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=-q_1;$$

donc

$$y_1=\frac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-1}}-q_1:$$

c'est l'expression que donne Abel; mais on a encore

$$y_2 y_3\ldots y_n=\pm\frac{\rho_0}{\rho_{n-1}},$$

$$y_1 y_2\ldots y_n=\mp q_n;$$

donc

$$y_1=-\frac{q_n\rho_{n-1}}{\rho_0}.$$

De même,

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_n}=-\frac{q_{n-1}}{q_n},$$

$$\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_n}=-\frac{\rho_1}{\rho_0},$$

d'où

$$\frac{1}{y_1}=\frac{\rho_1}{\rho_0}-\frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

On pourra donc se borner à calculer dans R_μ deux termes seulement, soit, comme le propose Abel, ρ_{n-1}, ρ_{n-2}, soit ρ_0, ρ_1 ou ρ_0, ρ_{n-1}, comme il résulte de notre remarque.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 709

(voir 2e série, t. III, p. 442);

PAR M. RECOQ,
Élève du lycée de Montpellier (classe de M. Berger).

Trouver le lieu géométrique d'un point tel, que la somme des carrés des trois normales menées de ce point à une parabole donnée soit égale à un carré donné k^2.

Soient (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des pieds des trois normales, menées à la parabole par un point quelconque (α, β) du lieu; nous supposons la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. L'équation aux abscisses des pieds de ces normales étant

$$x^3 + 2(p - \alpha)x^2 + \ldots = 0,$$

on a

(1) $$x + x_1 + x_2 = -2(p - \alpha),$$

et l'équation aux ordonnées manquant du second terme, on a

(2) $$y + y_1 + y_2 = 0.$$

Si, en tenant compte de ces deux relations, on fait la somme des expressions

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \delta^2,$$
$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \delta_1^2,$$
$$(x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = \delta_2^2,$$

où δ, δ_1, δ_2 désignent les trois normales issues du point (α, β), il vient

$$(3)\quad k^2 = x^2 + x_1^2 + x_2^2 + y^2 + y_1^2 + y_2^2 + 4\alpha(p-\alpha) + 3\alpha^2 + 3\beta^2.$$

Mais on sait que les pieds des trois normales se trouvent sur le cercle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 - (p+\alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0;$$

on a donc

$$x^2 + y^2 - (p+\alpha)x - \frac{\beta}{2}y = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 - (p+\alpha)x_1 - \frac{\beta}{2}y_1 = 0,$$

$$x_2^2 + y_2^2 - (p+\alpha)x_2 - \frac{\beta}{2}y_2 = 0,$$

ou en ajoutant, et ayant égard aux relations (1) et (2),

$$(4)\quad x^2 + x_1^2 + x_2^2 + y^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(p+\alpha)(p-\alpha) = 0.$$

Les équations (3) et (4) ajoutées membre à membre donnent, en remplaçant α et β par x et y, l'équation du lieu

$$(5)\qquad 3\left(x^2 + y^2 - \frac{k^2}{3}\right) = 2(x-p)^2.$$

Cette équation représente une ellipse ayant son grand axe sur l'axe des x; son centre est situé à gauche de l'axe des y à une distance $2p$; toutes les ellipses obtenues en faisant varier k ont donc un centre commun, en outre elles sont toutes semblables. Leur demi-grand axe est $\sqrt{6p^2 + k^2}$; quand on donne à k des valeurs croissantes, cet axe augmente indéfiniment et par suite aussi la courbe qui est toujours semblable à elle-même. On peut déterminer k de manière que l'ellipse soit aussi grande que l'on voudra; mais parmi ces ellipses corres-

pondant à une valeur *réelle* de k, il y en a une qui est minimum, c'est celle qui répond à la valeur $k=0$

$$3(x^2+y^2)=2(x-p)^2,$$

laquelle a évidemment pour foyer le sommet de la parabole, et pour directrice la droite $x=p$.

L'ellipse coupe généralement la développée :

$$y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3;$$

les points qui occupent la portion intérieure fournissent trois normales réelles, tandis que les autres n'en donnent qu'une. Soit A le sommet de la développée qui est sur l'axe des x à une distance $x=p$ de l'origine, B le point situé à droite de l'origine où l'ellipse coupe l'axe des x, la valeur de k pour laquelle $OB=OA=p$ est une limite en deçà de laquelle on ne peut plus mener trois normales réelles; cette limite est $k=p\sqrt{3}$.

La forme de l'équation (5) montre que la courbe est doublement tangente au cercle

$$x^2+y^2-\frac{k^2}{3}=0,$$

aux points où elle est coupée par l'ordonnée du point A. Le rayon du cercle est indépendant de p : donc, quand on fait varier le paramètre de la parabole, l'ellipse enveloppe le cercle

$$x^2+y^2-\frac{k^2}{3}=0\ (*).$$

Puisque les points de contact sont sur l'ordonnée du point A, ils seront réels ou imaginaires selon qu'on aura $k\gtrless p\sqrt{3}$; pour $k=p\sqrt{3}$, ils se réuniront au point A.

(*) Cette remarque a été faite également par M. Audoynaud.

Autre solution. — La méthode précédente repose sur un artifice, mais on peut en donner une plus générale et plus directe qui s'applique à toutes les coniques.

Le problème serait résolu si l'on connaissait l'équation qui admet pour racines les carrés des trois normales menées du point (α, β) à la courbe.

Exprimons pour cela que le cercle

$$(6) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\delta^2=0,$$

qui a pour centre le point (α, β), est tangent à la conique

$$Ay^2+Bx^2-1=0;$$

alors δ représentera une normale.

Cette condition peut se trouver en exprimant que l'équation en λ relative à l'intersection des deux courbes a une racine double. On obtiendra l'équation cherchée, en se servant de la relation connue qui lie les coefficients d'une équation du troisième degré ayant deux racines égales.

L'équation en λ relative à leur intersection est

$$\begin{aligned}&\lambda^3 AB+\lambda^2[A+B-AB(\alpha^2+\beta^2)+AB\delta^2]\\ &+\lambda[A\alpha^2+B\beta^2+1-(A+B)(\alpha^2+\beta^2)+(A+B)\delta^2]+\delta^2=0;\end{aligned}$$

on en déduit l'équation au carré des normales

$$\begin{aligned}AB(A-B)^2\delta^8-2\delta^6[AB(A^2-3AB+2B^2)\alpha^2+AB(B^2-3AB+A^2)\\ +(A+B)(A-B)^2]+\ldots=0.\end{aligned}$$

On a donc pour le lieu du point (α, β)

$$\begin{aligned}2AB[(A^2-3AB+2B^2)x^2+(B^2-3AB+2A^2)y^2]\\ =(A-B)^2[k^2AB-2(A+B)].\end{aligned}$$

Ce lieu est une conique.

Examinons en particulier le cas de l'hyperbole équila-

tère. L'équation se réduit au cercle

$$x^2+y^2=\frac{k^2}{3}.$$

Ce résultat est indépendant de la grandeur de l'hyperbole. Toutes les hyperboles équilatères concentriques, dont les axes ont la même direction, donnent lieu au même cercle, et l'on a ce théorème :

Étant donné un point P *fixe dans le plan d'une hyperbole équilatère qui varie en conservant son centre et la direction de ses axes, la somme des carrés des quatre normales menées de ce point à cette hyperbole reste égale à une constante* k^2 *égale au triple du carré de la distance du point au centre de l'hyperbole; par suite elle est la même pour tous les points* P *situés sur un cercle concentrique à l'hyperbole.*

Note. — M. Mister, professeur à l'Athénée royal de Bruges, a aussi résolu le même problème pour les coniques en général. Autres solutions de MM. Audoynaud, professeur au lycée de Poitiers; Camille Massing, L. Lacauchie, Stanislas Klisiowski, élèves de Sainte-Barbe; Pabon, du lycée de Bordeaux; Gilliot, Rietsch, Alphonse Aubrun, Weil, du lycée de Strasbourg; Morhange et Henry, Legros, Margot, du lycée Charlemagne; Drouard et Pettit, Thurninger, du lycée Saint-Louis; P. Cagny, du lycée Louis-le-Grand; Léon d'Apvril et Albert Robin, du lycée de Grenoble; Bertrand et Grassat, du lycée de Lyon; de Vigneral; Marmier, de l'Estourbeillon, de l'École Sainte-Geneviève; Daguenet, du lycée de Caen; O. Puel, du Prytanée; Roques, soldat au 53e régiment d'infanterie.

Question 714;

Par M. J. MURENT,
Licencié ès Sciences (à Clermont-Ferrand).

Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1.x_2.x_3.x_4.x_5.$$

Nombre des solutions entières et positives.

Nous considérerons d'abord l'équation générale

$$(1)\qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 . x_2 \ldots x_n,$$

dont nous représenterons une solution quelconque par la notation

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n),$$

et nous établirons les propriétés suivantes :

1° *L'équation* (1) *admet toujours au moins une solution, savoir :* $(n, 2, 1, 1, 1, \ldots, 1)$. Dans le cas où l'on a $n = 2$, cette solution se réduit à $(2, 2)$.

2° *Comme on suppose* $n > 1$, *les nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ne peuvent pas être tous égaux à l'unité.*

3° *Parmi les nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *il y en a au moins deux qui sont supérieurs à l'unité.*

En effet, si a_1 seul était plus grand que 1, tous les autres $a_2, a_3, \ldots, a_n$ étant égaux à 1, l'équation (1) se réduirait, pour ces valeurs des inconnues, à l'égalité

$$a_1 + (n - 1) = a_1,$$

égalité impossible, puisqu'on a $n > 1$.

4° *Lorsqu'on a* $n > 2$, *les nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ne peuvent pas être tous supérieurs à l'unité.*

Car en représentant ces nombres par $1 + \alpha_1$, $1 + \alpha_2, \ldots$, $1 + \alpha_n$, on devrait avoir

$$(1 + \alpha_1) + (1 + \alpha_2) + \ldots + (1 + \alpha_n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n),$$

d'où

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\ldots(1 + \alpha_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = n,$$

égalité impossible, attendu que chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant au moins égal à 1, le premier

membre est au moins égal à $2^n - n$, quantité toujours plus grande que n quand on a $n > 2$. En effet, si l'on compare les deux produits

$$2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2, \quad \text{et} \quad n \times 2 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1,$$

composés chacun de n facteurs dont la somme est la même, on sait que le premier produit dont tous les facteurs sont égaux est plus grand que le second, c'est-à-dire que l'on a $2^n > 2n$, d'où $2^n - n > n$.

5° Il résulte de ce qui précède que lorsqu'on a $n > 2$, toute solution $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de l'équation (1) doit comprendre au moins un nombre égal à l'unité et au moins deux nombres supérieurs à l'unité.

Pour abréger, nous nommerons solution d'indice i toute solution telle que $(a_1, a_2, \ldots, a_i, 1, 1, \ldots, 1)$, comprenant i nombres supérieurs à 1 et $n - i$ nombres égaux à 1. Nous savons déjà que la limite inférieure de l'indice i est 2, et nous allons en chercher une limite supérieure.

Pour cela, représentons les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_i$ par $1 + \alpha_1, 1 + \alpha_2, \ldots, 1 + \alpha_i$. Pour que la solution

$$(a_1, a_2, \ldots, a_i, 1, 1, \ldots, 1)$$

convienne à l'équation (1), il faudra que l'on ait l'égalité

$$(1 + \alpha_1) + (1 + \alpha_2) + \ldots + (1 + \alpha_i) + n - i$$
$$= (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_i),$$

ou la suivante

$$(2) \quad (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_i) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i) = n.$$

Le premier membre de cette dernière étant au moins égal à $2^i - i$, il faudra que l'on ait

$$2^i - i \leqq n.$$

En donnant à i les valeurs successives 2, 3, 4, 5, ..., et

formant les valeurs correspondantes de $2^i - i$, la valeur l de i qui donnera la plus grande valeur de $2^i - i$ contenue dans n sera la limite supérieure de i (*).

Les valeurs successives de $2^i - i$ peuvent d'ailleurs se déduire les unes des autres d'après une loi très-simple exprimée par l'identité

$$2^{i+1} - (i+1) = (2^i - i) \times 2 + (i-1),$$

qui donne le tableau suivant :

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ldots,$$
$$2^i - i = 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 27,\ 58,\ 121,\ldots.$$

Dans le cas où n est égal à une des valeurs de $2^i - i$, par exemple à $2^k - k$, on satisfait à l'équation (2) en prenant $i = k$ et faisant $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i = 1$, ce qui réduit le premier membre à $2^k - k$. Il en résulte pour l'équation (1) la solution

$$(2, 2, 2, \ldots, 2, 1, 1, \ldots, 1),$$

et cette solution est la seule d'indice i, comme on le reconnaît facilement en se reportant à l'équation (2).

6° On voit que par les propriétés précédentes, la résolution de l'équation générale (1) est ramenée à la recherche des diverses solutions d'indices : 2, 3, 4, ..., l.

Nous allons appliquer ces propriétés à l'équation particulière

$$(3) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5,$$

qui fait le sujet de la question 714.

(*) La limite supérieure des valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est n ; et la limite supérieure du produit $x_1 . x_2 \ldots x_n$ est $2n$. Pour $n > 2$, la limite inférieure de ce produit est $n + 3$. G.

Le nombre n est ici de la forme $2^i - i$, car on a

$$5 = 2^3 - 3;$$

la limite supérieure de i est donc 3, et l'équation n'a qu'une seule solution d'indice 3, qui est

$$(2, 2, 2, 1, 1).$$

Pour obtenir les solutions d'indice 2, posons, suivant les notations déjà employées,

$$(1 + \alpha_1) + (1 + \alpha_2) + 3 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2),$$

d'où, en réduisant,

$$\alpha_1 \alpha_2 = 4.$$

Décomposant 4 en deux facteurs de toutes les manières possibles, on n'a que deux équations :

$$\alpha_1 \alpha_2 = 2 \times 2,$$

et

$$\alpha_1 \alpha_2 = 4 \times 1.$$

On satisfait à la première en prenant $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, et à la seconde en prenant $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$, d'où résultent, pour l'équation (3), les deux solutions

$$(3, 3, 1, 1, 1)$$

et

$$(5, 2, 1, 1, 1).$$

Cette dernière est celle que nous avions reconnue *à priori* en considérant l'équation générale (1).

En résumé, l'équation (3) n'admet que trois solutions en nombres entiers positifs, savoir :

$$(2, 2, 2, 1, 1), \quad (3, 3, 1, 1, 1), \quad (5, 2, 1, 1, 1).$$

Note. — M. de Virieu, professeur à Lyon, démontre que le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 . x_2 \ldots x_n$$

est au moins égal au nombre des décompositions différentes de $n-1$ en deux facteurs entiers et positifs. En outre, M. de Virieu donne les solutions de cette équation pour les valeurs de n comprises entre 2 et 20.

M. Barrère (Alexandre), élève au lycée de Nîmes, a trouvé les solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = x_1 . x_2 . \ . x_8,$$

en remarquant que si x_n représente le plus grand des nombres entiers satisfaisant à l'équation (1), le produit $x_1 . x_2 \ldots x_{n-1}$ est nécessairement égal à l'un des nombres $2, 3, \ldots, n-1$.

La même question a été résolue par MM. P. Cagny, élève au lycée Louis-le-Grand; Boutmy, élève au lycée Saint-Louis; Rezzonico, Agénor Jouglet.

Question 697

(voir 2e série, t. III, p. 140);

PAR M. MAX CORNU,
Élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

L'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à deux surfaces homofocales du second ordre a pour projections, sur les trois plans principaux des deux surfaces, les développées des courbes focales. (MOUTARD.)

On sait que la surface développable circonscrite aux deux surfaces du second degré

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + l^2} + \frac{y^2}{b^2 + l^2} + \frac{z^2}{c^2 + l^2} - 1 = 0,$$

est la surface polaire réciproque de la surface dont l'arête

de rebroussement est la courbe d'intersection des surfaces polaires réciproques des proposées, et que la projection de l'arête de rebroussement sur un plan quelconque est l'enveloppe de la projection des génératrices de la surface sur le plan considéré.

Je prends pour sphère de transformation celle qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0;$$

les deux surfaces deviennent

$$(1) \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0,$$

$$(2) \qquad (a^2 + l^2)x^2 + (b^2 + l^2)y^2 + (c^2 + l^2)z^2 - 1 = 0.$$

Si je retranche la première équation de la seconde, j'obtiens l'équation d'une troisième surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

qui passe par la courbe d'intersection des deux premières; on voit aussi que cette courbe est commune à toutes les réciproques des surfaces homofocales aux deux premières et qu'elle est imaginaire, d'où l'on peut conclure que toutes les surfaces du second degré homofocales sont inscrites dans une même surface développable, et que cette surface est imaginaire.

La tangente en un point (x, y, z) de la courbe d'intersection a pour équations

$$a^2Xx + b^2Yy + c^2Zz - 1 = 0,$$

$$(a^2 + l^2)Xx + (b^2 + l^2)Yy + (c^2 + l^2)Zz - 1 = 0.$$

La polaire réciproque de cette droite est une génératrice de la surface développable cherchée, et cette droite a pour équations

$$\frac{X - a^2x}{x} = \frac{Y - b^2y}{y} = \frac{Z - c^2z}{z}.$$

Cette équation ne dépend pas de l^2; donc on a une nouvelle preuve de ce fait, que toutes les surfaces homofocales sont inscrites dans la même surface développable.

Remarque. — La ligne de contact des surfaces avec leur enveloppe est la ligne d'intersection limite de deux surfaces

$$\frac{x^2}{a^2+p^2}+\frac{y^2}{b^2+p^2}+\frac{z^2}{c^2+p^2}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2+q^2}+\frac{y^2}{b^2+q^2}+\frac{z^2}{c^2+q^2}-1=0.$$

Quand q converge vers p, la projection de la courbe d'intersection sur le plan des xy est

$$\frac{y^2(a^2-b^2)}{(b^2-p^2)(b^2-q^2)}+\frac{z^2(a^2-c^2)}{(c^2-p^2)(c^2-q^2)}+1=0;$$

si $q=p$, il vient

$$\frac{y^2(a^2-b^2)}{(b^2-p^2)^2}+\frac{z^2(a^2-c^2)}{(c^2-p^2)^2}+1=0,$$

courbe imaginaire; donc la surface lieu de ces courbes, dont la projection sur le plan des yz est imaginaire, est elle-même imaginaire.

Je projette les génératrices de la surface sur l'un des plans principaux; au lieu de refaire le calcul pour chaque plan principal, il suffira de faire la permutation tournante des lettres x, y, z; a, b, c.

Je projette la génératrice sur le plan des xy : l'équation de la projection est

$$(3)\qquad \frac{X-a^2x}{x}=\frac{Y-b^2y}{y};$$

x et y sont liés entre eux par la relation

$$(4)\qquad (a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2-1=0,$$

qu'on obtient en éliminant z entre les équations (1) et (2).

On sait que lorsqu'on a, entre deux paramètres u et v, la relation

$$\frac{P^2}{(P^2-Q^2)^2u^2}+\frac{Q^2}{(P^2-Q^2)^2v^2}-1=0,$$

la droite $ux+vy+1=0$ est normale à la courbe

$$\frac{x^2}{P^2}+\frac{y^2}{Q^2}-1=0.$$

L'équation (3) peut s'écrire

$$X\frac{1}{x(b^2-a^2)}+Y\frac{-1}{y(b^2-a^2)}-1=0.$$

L'équation (4), qui exprime la relation entre x et y, peut se mettre sous la forme

$$\frac{a^2-c^2}{(a^2-b^2)^2\left[\frac{1}{(a^2-b^2)x}\right]^2}+\frac{b^2-c^2}{(a^2-b^2)^2\left[\frac{-1}{(a^2-b^2)y}\right]^2}-1=0,$$

ce qui montre que la droite considérée, c'est-à-dire la projection d'une génératrice de la surface développable sur le plan des xy, est constamment normale à la courbe

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}-1=0,$$

qui est la courbe focale relative au plan des xy. Donc cette droite enveloppe la développée de la courbe focale considérée.

Démonstration géométrique.

On sait qu'un foyer est une sphère de rayon nul doublement tangente à la surface aux points où la directrice correspondant à ce foyer coupe la surface.

Considérons deux surfaces homofocales du second degré et un de leurs foyers F ; à ce foyer correspondra une directrice différente pour les deux surfaces. Imaginons deux plans tangents aux points de contact de la sphère avec chacune des deux surfaces : ils se coupent suivant une droite tangente à la sphère et tangente aussi à la courbe, point de contact de chaque plan tangent avec la sphère. Donc la droite considérée est une génératrice de la surface développable circonscrite aux deux surfaces homofocales ; cette droite rencontre les deux directrices correspondant au foyer F aux points où elle touche chacune des deux surfaces ; donc la projection de cette droite sur le plan qui contient le foyer sera la droite qui joint les pieds des directrices ; on voit d'ailleurs que les pieds des deux directrices et le foyer sont sur une même ligne droite, projection de quatre génératrices de la surface. On sait que la ligne qui joint un foyer au pied de la directrice correspondante est normale à la conique focale.

Donc la projection d'une génératrice de la surface sur un plan principal commun aux deux surfaces enveloppe la développée de la courbe focale relative au plan principal considéré.

Note. — MM. Albert Sartiaux et Nouette, élèves de l'École Polytechnique, nous ont adressé des démonstrations analytiques du même théorème.

Questions 700 *et* 719

(voir p. 48) ;

Par M. H. DURRANDE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

M. Picart, professeur au lycée Charlemagne, a donné dans ce recueil (t. III, 2e série, p. 532) une très-élégante solution, fondée sur des considérations de Géométrie infi-

nitésimale, de la question 700, posée par M. Strebor. Je trouve aujourd'hui, dans le numéro de janvier 1865, une nouvelle question relative à la même surface, et qui n'est qu'un corollaire de la précédente.

Voici une autre manière d'arriver à ces résultats; elle est fondée sur l'emploi des coordonnées elliptiques.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2 - \beta^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2 - \gamma^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - \beta^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2 - \mu^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\gamma^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{\gamma^2 - \nu^2} = 1, \end{cases}$$

les équations d'un système triple de surfaces homofocales et orthogonales du second ordre; ρ, μ, ν sont des paramètres variables, et β, γ des constantes. On supposera $\beta < \gamma$, $\rho > \gamma$, $\beta < \mu < \gamma$, et $\nu < \beta$, de sorte que la première des équations (1) représente un système d'ellipsoïdes homofocaux, les deux autres des hyperboloïdes; les trois surfaces se coupent orthogonalement, et leurs intersections sont des lignes de courbure sur chacune d'elles, d'après le beau théorème de M. Ch. Dupin.

Par chaque point (x, y, z) de l'espace passent trois surfaces du système (1) qu'on obtiendrait en résolvant les équations du système (1) par rapport à ρ, μ, ν, et en exprimant ces trois quantités en fonction des coordonnées particulières du point donné. Réciproquement, étant données des valeurs de ρ, μ, ν, satisfaisant aux conditions ci-dessus, on en déduit les valeurs des coordonnées du point (x, y, z) où se coupent les trois surfaces (ρ), (μ), (ν). C'est pourquoi l'on peut considérer les paramètres variables ρ, μ, ν comme les coordonnées d'un point de l'espace. Toute relation entre ρ, μ, ν représentera une

surface, dont on traduira l'équation en coordonnées rectilignes en remplaçant ρ, μ, ν par leurs expressions en x, y, z, tirées des équations (1). Ainsi $\rho = c$ représente un des ellipsoïdes représentés par la première des équations (1) ; de même $\mu = c'$, $\nu = c''$ représentent deux hyperboloïdes homofocaux.

Cela posé, proposons-nous de trouver, en fonction de ρ, μ, ν, l'équation de la *surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes* (ρ). Pour l'obtenir, il suffit de remarquer que ces cercles sont les intersections des ellipsoïdes (ρ) par les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 - \beta^2, \tag{2}$$

ayant pour rayons les demi-axes moyens des ellipsoïdes; donc on obtiendra l'équation de la surface, que, pour abréger, je désignerai par S, en éliminant ρ entre l'équation (2) et la première du groupe (1). Mais cette élimination se fait d'une manière très-élégante, en remarquant que les équations (1) donnent la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

qui, combinée avec l'équation (2), donne

$$\mu^2 + \nu^2 = \gamma^2. \tag{3}$$

C'est précisément l'équation de S.

La forme seule de cette équation fournit immédiatement la démonstration des théorèmes de M. Strebor.

1° *La surface* S *coupe orthogonalement les ellipsoïdes* (ρ). (Quest. 700.)

On sait que pour que deux surfaces

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

se coupent orthogonalement, on doit avoir

$$\frac{dF}{dx}\cdot\frac{df}{dx}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{df}{dy}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{df}{dz}=0.$$

Or, dans le cas actuel, cette relation devient

$$\left\{\begin{array}{l}\mu\left[\dfrac{d\mu}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}+\dfrac{d\mu}{dy}\cdot\dfrac{d\rho}{dy}+\dfrac{d\mu}{dz}\cdot\dfrac{d\rho}{dz}\right]\\+\nu\left[\dfrac{d\nu}{dx}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}+\dfrac{d\nu}{dy}\cdot\dfrac{d\rho}{dy}+\dfrac{d\nu}{dz}\cdot\dfrac{d\rho}{dz}\right]\end{array}\right\}=0,$$

qui est identiquement vérifiée en vertu des équations (1).

2° *Les trajectoires orthogonales des cercles communs à la surface* S *et aux ellipsoïdes* (ρ) *sont les lignes de courbure communes aux hyperboloïdes* (μ) *et* (ν). (Quest. 719.)

Désignons par c' une constante comprise entre β et γ; pour $\mu = c'$, on déduit de l'équation (3)

$$\nu^2 = \gamma^2 - c'^2 = c''^2;$$

on peut disposer de c' de manière que c'' soit $< \beta$; et on voit alors que les équations

$$\mu = c', \quad \nu = c''$$

représentent deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes, du système (1), dont l'intersection, qui est une ligne de courbure sur chacun d'eux, est tout entière sur la surface S. D'ailleurs, cette intersection est normale à tous les ellipsoïdes (ρ); donc elle coupe orthogonalement toutes les lignes de courbure de ces ellipsoïdes, et en particulier les cercles communs à la surface S et aux ellipsoïdes (ρ).

THÉORÈME SUR L'HEXAGONE.

Quand un hexagone est inscrit dans un cercle, le produit des diagonales qui joignent les sommets opposés est égal à la somme des produits de chacune de ces diagonales par les deux côtés qui n'ont avec elle aucune extrémité commune, plus le produit des côtés de rang pair, plus le produit des côtés de rang impair.

Démonstration. — Soit ABCDEF l'hexagone en question. Je construis le triangle ACE. Appliquant le théorème de Ptolémée à chacun des quadrilatères qu'on peut former avec deux côtés de ce triangle et deux côtés de l'hexagone, j'ai les équations

$$-\mathrm{AD}.\mathrm{EC}+\mathrm{DE}.\mathrm{AC}+\mathrm{CD}.\mathrm{AE}=0,$$
$$\mathrm{AB}.\mathrm{EC}-\mathrm{BE}.\mathrm{AC}+\mathrm{BC}.\mathrm{AE}=0,$$
$$\mathrm{AF}.\mathrm{EC}+\mathrm{EF}.\mathrm{AC}-\mathrm{CF}.\mathrm{AE}=0.$$

Ces équations étant homogènes relativement à EC, AC, AE, il en résulte

$$\begin{vmatrix} -\mathrm{AD} & \mathrm{DE} & \mathrm{CD} \\ \mathrm{AB} & -\mathrm{BE} & \mathrm{BC} \\ \mathrm{AF} & \mathrm{EF} & -\mathrm{CF} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{AD}.\mathrm{BE}.\mathrm{CF}=\mathrm{AD}.\mathrm{BC}.\mathrm{EF}+\mathrm{BE}.\mathrm{AF}.\mathrm{CD}+\mathrm{CF}.\mathrm{AB}.\mathrm{DE}$$
$$+\mathrm{AB}.\mathrm{CD}.\mathrm{EF}+\mathrm{BC}.\mathrm{DE}.\mathrm{FA}.$$

Note. — Ce théorème fait l'objet de la question 431, résolue t. XVII, p. 263. La démonstration précédente semble préférable à celle qu'on lit à l'endroit cité, parce qu'elle n'exige que trois équations au lieu de quatre et

qu'elle donne la relation sous forme de déterminant, ce qui est très-précieux, comme chacun sait.

On déduit de ce théorème une relation analogue à la précédente, entre les aires des triangles ayant un sommet commun et pour bases les côtés et les grandes diagonales d'un hexagone plan quelconque. J'ai donné cette relation t. XV, p. 378. P.

CORRESPONDANCE.

1. Nous prions les personnes qui veulent bien nous envoyer des questions pour être proposées à nos abonnés, de vérifier chaque énoncé avec le plus grand soin. Une expérience récente nous a appris qu'on pouvait perdre beaucoup de temps en cherchant à démontrer des propositions dans lesquelles un mot a été substitué à un autre par inadvertance ou dont l'énoncé pèche par l'omission de quelque condition qui en limite la généralité.

Nous recommandons à nos correspondants d'écrire lisiblement et de mettre sur des feuilles séparées les diverses questions qu'ils résolvent. Cela nous est indispensable pour le classement. Les élèves ne doivent pas oublier qu'une question n'est qu'à moitié résolue lorsqu'on n'a pas discuté les cas particuliers les plus intéressants.

2. M. Mention a démontré, en décembre 1864, que le lieu des centres des hyperboles équilatères tangentes aux côtés d'un triangle est ce qu'il appelle *cercle des hauteurs*, théorème déjà donné par lui en 1850 (voir *Nouvelles Annales*, t. IX, p. 7). M. Mathieu nous écrit à cette occasion : « Faute d'avoir examiné d'une manière suffisante le cercle que M. Mention nomme *cercle des hauteurs*, il m'avait échappé qu'il se confond avec le cercle conjugué *dans le*

cas du triangle obtusangle. Dans le triangle acutangle, c'est autre chose, puisque le cercle des hauteurs est réel, tandis que le cercle conjugué devient imaginaire. Le cercle conjugué est donc bien moins général que le cercle des hauteurs, et il conviendrait sans doute de se servir plutôt du terme de *cercle conjugué* que du terme de *cercle des hauteurs* pour représenter un lieu qui doit devenir imaginaire quand le triangle devient acutangle. » M. Mention adhère complétement aux vues de M. Mathieu, et sacrifie une dénomination qu'il n'avait adoptée que pour abréger, à une époque où les propriétés du cercle conjugué n'avaient pas encore été étudiées par les géomètres. Ajoutons, pour quelques-uns de nos lecteurs, qu'un cercle et un triangle sont conjugués, lorsque chaque sommet du triangle est, relativement à ce cercle, le pôle du côté opposé.

3. M. Gerhardt, élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard), démontre le théorème suivant : *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène quatre droites*, OAa, OBb, OCc, ODd *coupant la conique aux points* A, a, B, b, *etc.*, *le point de rencontre des droites* bA, Ac *et le point de rencontre des droites* aB, cD *sont en ligne droite avec le point* O.

M. Gerhardt démontre bien simplement son théorème en mettant l'équation de la conique sous la forme

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0.$$

Il en déduit diverses conséquences et un théorème corrélatif.

Le théorème de M. Gerhardt peut encore se démontrer avec une grande facilité en supposant que la conique se réduise à un cercle et que le point O passe à l'infini. Par la méthode des projections on étend ensuite le théorème aux autres sections coniques.

4. Un correspondant qui ne veut pas être nommé nous adresse quelques réflexions au sujet d'un Rapport fait par une Commission chargée d'examiner les copies couronnées au concours général en Mathématiques spéciales et en Mathématiques élémentaires depuis 1830 jusqu'à 1863.

Il résulte de ce Rapport qu'on a obtenu : 1° d'excellents résultats lorsqu'on a posé aux candidats des questions intéressantes et de nature à favoriser l'esprit d'invention ; 2° des résultats médiocres, quand on a proposé des questions du cours, ne sollicitant pas assez l'initiative des candidats ; 3° des résultats très-mauvais, quand les questions s'adressaient seulement à la mémoire des élèves, ou exigeaient des calculs très-laborieux. Pas n'était besoin, ajoute notre correspondant, de réunir des gens d'esprit, de leur faire construire des courbes et calculer des moyennes, pour arriver à de pareilles conclusions. Nous sommes parfaitement de son avis. Le simple bon sens indique combien importe le choix judicieux des questions posées dans un concours. M. Terquem n'avait pas eu besoin de statistique pour critiquer les compositions données vers 1853, et où le mérite des candidats se jugeait sur le plus ou moins d'habitude qu'ils avaient de manier les Tables de logarithmes. Les concours généraux pouvaient faire croire que l'enseignement mathématique avait beaucoup baissé en France depuis une dizaine d'années. La lecture des *Nouvelles Annales*, où tant de questions difficiles sont habilement résolues par des élèves, prouve heureusement le contraire.

5. M. Réalis, ingénieur à Turin, nous écrit :

« M. Catalan a parfaitement raison d'observer que le procédé que j'expose, page 439 du tome précédent, se trouve indiqué dans le *Manuel des candidats à l'École Polytechnique* ; et, certes, si j'avais eu cet excellent ou-

vrage sous les yeux lorsque je vous ai envoyé ma Note sur la décomposition des fractions rationnelles, j'aurais supprimé la première partie de cette Note.

» Mais qu'il me soit permis d'ajouter que ce n'est point *contrairement à mon opinion* que le savant professeur dit que le calcul des dérivées successives de la fraction.... est presque toujours fort compliqué. Si l'on veut bien se reporter à l'article cité, on verra que je n'y donne point le procédé en question comme constituant une méthode pratique ou nouvelle de décomposition ; je rappelle les formules de l'*Algèbre supérieure* et je dis : *Cette manière de parvenir à l'expression algébrique des numérateurs des fractions..... est, ce me semble, plus expéditive et plus simple que celle qu'on trouve exposée, etc.* Mon but n'était donc que de simplifier la démonstration de formules connues, précieuses au point de vue théorique, mais qui, évidemment, ne se prêtent pas commodément à la décomposition effective. Or, cette simplification avait déjà été faite. »

6. *Extrait d'une lettre de M. Mannheim.* — « ... Vous pourriez appeler l'attention des élèves sur l'observation suivante :

» *On n'altère pas le résultat de la solution d'une question, lorsqu'on fait varier les éléments qui ne sont pas intervenus dans le développement de cette solution.*

» En voici une application : Quel est le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points fixes?

» Soient

(1) $$S = 0,$$

(2) $$S' = 0,$$

les équations de deux coniques : l'équation

(3) $$S + \lambda S' = 0$$

représente, lorsqu'on donne à λ toutes les valeurs possibles, le faisceau des coniques qui passent par les points communs aux deux premières.

» Pour déterminer le lieu des centres de ces courbes, on élimine λ entre les dérivées, prises par rapport à x et à y, de l'équation (3).

» On trouve ainsi que le lieu est une courbe du second degré. Cette courbe passe par les points de rencontre des droites qui réunissent deux à deux les quatre points communs à toutes les coniques du faisceau et par les milieux de ces droites. Observons maintenant que les termes indépendants dans les équations (1) et (2) ne sont pas intervenus dans les dérivées de l'équation (3). D'après ce qui précède, notre lieu ne sera pas changé si nous modifions ces quantités indépendantes, et si nous prenons pour les équations des deux premières coniques

$$S + \mu = 0, \quad S' + \nu = 0,$$

dans lesquelles μ et ν sont deux constantes arbitraires. Interprétons géométriquement ce résultat analytique. L'équation

$$S + \mu = 0,$$

lorsqu'on fait varier μ, représente des coniques concentriques semblables à la conique dont l'équation est (1) et semblablement placées : indiquons ces courbes en disant qu'elles font partie du faisceau A.

» De même, indiquons les coniques représentées par l'équation

$$S' + \nu = 0,$$

en disant qu'elles font partie du faisceau B.

» Le résultat de notre observation peut alors s'énoncer ainsi :

» *Quelles que soient les deux courbes des faisceaux* A

et B *prises pour fixer quatre points, les coniques passant par ces quatre points auront leurs centres sur une courbe unique du second degré* (C).

» Si les deux premières courbes des faisceaux A et B sont tangentes entre elles, leur point de contact appartiendra à (C); donc :

» *Les points où les courbes du faisceau* A *sont touchées par les courbes du faisceau* B *sont sur la conique* (C).

» De là on déduit le nombre des coniques du faisceau B qui touchent une conique fixe.

» Si les courbes du faisceau B sont des circonférences concentriques, les points où elles touchent les courbes du faisceau A ne sont autres que les pieds des normales abaissées, sur ces courbes, du centre fixe de toutes les courbes B; donc :

» *Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point fixe sur des coniques concentriques semblables et semblablement placées est une conique.*

» On déduit de là qu'on peut mener quatre normales à une conique par un point pris dans le plan de cette courbe.

» Fixons une conique du faisceau A; *le lieu des milieux des cordes communes à cette courbe et aux courbes du faisceau* B *est la conique* (C); *cette courbe est aussi le lieu des points de rencontre de ces cordes communes.*

» Il serait bon d'engager les élèves à vous envoyer l'extension, au cas de l'espace, des considérations qui précèdent; ils trouveront ainsi très-simplement que d'un point on peut mener six normales à une surface du second degré. »

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

I.

PONCELET (J.-V.). — *Applications d'Analyse et de Géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des Propriétés projectives des figures*, avec des additions par MM. *Mannheim* et *Moutard*. Paris, 1861-64. 2 vol. in-8 de XIV-564 et VIII-602 pages. Librairie et imprimerie de Gauthier-Villars. — Prix : 20 francs.

M. Poncelet est du petit nombre des géomètres, doués de l'esprit d'invention, qui ont enrichi la science de méthodes neuves et fécondes. L'un des premiers parmi nous il a donné à la Géométrie pure ce caractère de généralité qu'on croyait ne pouvoir appartenir qu'à l'Analyse. Le *Traité des Propriétés projectives des figures* et les Mémoires *sur la théorie générale des polaires réciproques, sur les centres des moyennes harmoniques, sur l'analyse des transversales*, sont des modèles d'exposition, où les vérités naissent, se développent et se multiplient avec une merveilleuse facilité. C'est véritablement un charme.

Les circonstances dans lesquelles M. Poncelet s'est révélé géomètre méritent d'être notées. Sorti depuis deux ans de l'École Polytechnique, sous-lieutenant du génie, il faisait partie de cette expédition de Russie qui devait être si fatale à la France, lorsque le sort des combats le rendit prisonnier des Russes. On le transporta dans la ville de Saratoff, où on lui donna un gîte peu agréable sans doute, mais très-favorable à la méditation. Là, pour se distraire de ses propres malheurs et de ceux de sa patrie, le jeune sous-lieutenant, sans livres, sans secours étran-

ger, reprit une à une les matières de ses anciennes études mathématiques, dont une partie, au milieu du fracas des armes, avait déjà fui de sa mémoire, puis il aborda des sujets nouveaux. C'est dans cette captivité, qu'on nous permettra d'appeler heureuse, que M. Poncelet a jeté les bases de ses plus remarquables travaux. Dès l'année 1813 on peut dire que le *Traité des Propriétés projectives* était fait, pour le fond du moins, sinon pour la forme. Certes, en lisant ce livre célèbre, où les vérités découlent si naturellement de quelques principes généraux, on ne se douterait pas que des théories si faciles sont le résultat de calculs immenses, poursuivis avec cette ténacité que peut seule donner le séjour d'une prison, mais aussi avec une sagacité qui révélait déjà un géomètre du premier ordre. Mais une fois maître des résultats, M. Poncelet a compris qu'il devait exister des moyens simples d'y parvenir : il les a cherchés et a eu le bonheur de les trouver. On s'extasie quelquefois à la vue de longs Mémoires où s'étalent des calculs sans fin, et l'on y voit la preuve d'un grand travail et d'une grande force de tête. C'est souvent une erreur. L'auteur s'est presque toujours borné à copier son cahier de *pioche*, en y joignant quelques phrases pour lier les calculs; mais il ne s'est pas donné la peine de rédiger et de coordonner. Son travail, peut-être utile, ne restera pas sous sa forme actuelle: il apporte des matériaux; d'autres construiront l'édifice.

Les méthodes faciles, simples, qui paraissent naturelles, sont comme le style facile : on y arrive difficilement. Telle démonstration qui, dans le *Traité* publié en 1822, se réduit à quelques lignes, a peut-être plus coûté à son auteur que tel long développement analytique qui, se trouvant trop à l'étroit dans une page du format in-8, occupe tout un grand tableau annexé au texte (*).

Après un laps de cinquante ans, M. Poncelet a cru devoir livrer à l'impression les cahiers mêmes où il avait consigné ses découvertes, sous leur forme primitive. Malgré leur ressem-

(*) Voir p. 170, 316, 329, 335 du premier volume.

semblance inévitable avec le *Traité des Propriétés projectives*, les *Applications de Géométrie et d'Analyse* constituent un ouvrage nouveau à bien des égards. Si les résultats sont les mêmes, le point de vue est différent; on y suit la marche de l'invention, et jusqu'à ses tâtonnements, exposés avec la plus entière bonne foi. Les professeurs sauront gré à l'auteur de leur offrir un grand nombre d'exercices propres à montrer aux élèves les avantages et les inconvénients des diverses méthodes que l'on peut employer pour résoudre la même question (*). Enfin on trouvera dans les notes critiques, historiques et philosophiques de M. Poncelet d'utiles renseignements et d'importants sujets de méditation.

Voici le contenu des deux volumes :

Premier volume.

Premier cahier. — Lemmes de Géométrie synthétique (1813).

Deuxième cahier. — Lemmes de Géométrie analytique (1813).

Troisième et quatrième cahier. — Propriétés descriptives des simples coniques (1813).

Cinquième et sixième cahier. — Propriétés descriptives des doubles coniques et principes de projection centrale qui s'y rapportent. — Polygones à la fois inscrits et circonscrits à des coniques (1813).

Septième cahier. — Extrait résumé des précédents cahiers (juin 1814).

Souvenirs, Notes et additions. — Ici se placent trois Notes intéressantes : l'une de M. Mannheim, sur les polygones inscrits et circonscrits aux courbes planes; les deux autres de M. Moutard, sur le rapprochement entre les principales méthodes de Géométrie pure et celles de l'Analyse algébrique et sur les polygones à la fois inscrits et circonscrits à des coniques.

(*) Comme problème d'une grande difficulté analytique et que l'auteur arrive à traiter complétement, nous citerons la recherche du lieu des points qui, pris pour centre de projection, permettent de projeter deux coniques suivant deux cercles.

Deuxième volume.

Premier cahier. — Application des principes de projection et du principe de continuité à la recherche et à la démonstration des propriétés des figures polygonales mobiles sous diverses conditions (1814 à 1815).

Deuxième cahier. — Méthode des transversales appliquée aux courbes géométriques (1815 à 1816).

Troisième cahier. — Sur la loi des signes de position en Géométrie (1815 à 1817).

Quatrième cahier. — Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques (1818 à 1819).

Cinquième cahier. — Essai sur les propriétés projectives des sections coniques. (Présenté à l'Institut le 1er mai 1820.)

Sixième cahier. — Articles divers extraits des *Annales de Gergonne* (1817 à 1822).

Septième et dernier cahier. — Polémique et fragments divers.

Tel est, autant que le peu d'espace dont nous pouvons disposer permet de l'indiquer, l'ouvrage du profond géomètre. Nous ne voudrions mêler aucune critique à nos éloges, mais il nous est impossible de passer sous silence quelques notes chagrines, où l'auteur se montre d'une sévérité excessive envers les vivants et les morts. Nous regrettons principalement qu'il se soit montré si dur pour Cauchy, un des grands mathématiciens de notre époque. Mais un sentiment que le lecteur comprendra nous empêche d'insister sur ce point et de combattre en détail le plaidoyer de M. Poncelet *pro domo suâ*. Il y a sans doute dans l'action de se plaindre une certaine douceur qui nous est inconnue, puisqu'un savant illustre, universellement admiré et estimé, parvenu au comble des honneurs scientifiques, se plaint amèrement de ses contradicteurs comme s'ils l'avaient empêché de parvenir.

P.

II.

Poncelet (J.-V.). — *Traité des Propriétés projectives des figures*, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la Géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain. Tome I[er]. 2[e] édition, revue, corrigée et augmentée d'annotations nouvelles. In-4 de xxxii-428 pages et 12 planches. 1865. Imprimerie et librairie de Gauthier-Villars. — Prix : 40 francs les deux volumes.

Inutile de faire l'éloge d'un monument scientifique, dont la réputation est universelle. Le livre manquait depuis longtemps dans le commerce et atteignait aux ventes publiques des prix extraordinaires. Les géomètres accueilleront avec reconnaissance ce magnifique ouvrage, sorti des presses de M. Gauthier-Villars. Le second volume, qui s'imprime, contiendra : les théories générales des centres de moyennes harmoniques, de réciprocité polaire, de l'analyse des transversales, et leurs principales applications aux propriétés projectives des courbes et des surfaces géométriques. P.

III.

Audoynaud, professeur au lycée de Poitiers. — *Cosmographie très-élémentaire et purement descriptive, etc.* 2[e] édition; 1865. In-12 de viii-108 pages et 10 pl.

Ouvrage destiné aux élèves des classes littéraires des lycées et aux gens du monde. La clarté et l'exactitude sont les principales qualités de ce petit Traité qui nous paraît très-bien convenir au but que s'est proposé l'auteur. P.

QUESTIONS.

724. Étant donnés un point quelconque o, et la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, le cône qui a pour sommet le point o et pour directrice la courbe donnée coupe la sphère suivant une deuxième courbe située, comme la première, sur une infinité de surfaces du second ordre.

Cela posé, on demande de démontrer que les axes de chacune de ces nouvelles surfaces sont parallèles aux normales que l'on peut mener en o aux trois *anallagmatiques* du quatrième ordre, passant par ce point, qui ont pour *focale* la courbe donnée. (MOUTARD.)

725. Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x+2)^2+x^2]^3 = 8x^4(x+2).$$

(LEBASTEUR.)

726. Sur la surface lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, les trajectoires orthogonales de ces cercles sont des courbes dont chacune est une ligne de courbure de deux hyperboloïdes homofocaux avec les ellipsoïdes.

(STREBOR.)

727. Soit AB un diamètre d'un cercle et C le centre, et soit pris sur ce diamètre $CP = \frac{1}{3}AC$. Ayant tiré une droite quelconque par P rencontrant la circonférence en Q, R, menons les droites BR et QC, et soit S le point de rencontre de QC prolongé avec BR. En désignant

l'angle BSQ par ψ, et l'angle CBS par φ, il faut prouver que

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}=\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3.$$

(Strebor.)

728. Soient α, β, γ, δ, ε les racines de l'équation

$$x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0.$$

Si l'on a

$$(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2=0,$$

démontrer que la racine ε est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation. (Michael Roberts.)

729. Les directions des axes de la section faite par le plan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\lambda,$$

dans la surface

$$\begin{gathered}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy\\+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,\end{gathered}$$

sont données par les intersections du plan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$

avec le cône

$$\begin{gathered}(A\cos^2\beta+A'\cos^2\alpha-2B''\cos\alpha\cos\beta)(x^2\sin^2\beta-y^2\sin^2\alpha)\\+(A\cos^2\gamma+A''\cos^2\alpha-2B'\cos\alpha\cos\gamma)(z^2\sin^2\alpha-x^2\sin^2\gamma)\\+(A'\cos^2\gamma+A''\cos^2\beta-2B\cos\beta\cos\gamma)(y^2\sin^2\gamma-z^2\sin^2\beta)=0\end{gathered}$$

(J.-J.-A. Mathieu.)

730. Supposons que s_0, s_1, ..., représentent les sommes des puissances zéro, première, ..., des racines

de l'équation

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} a_2 x^{n-2}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a_3 x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Si

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0,$$

alors

$$(n-3) a_0^2 (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) - 6(n-2)(a_1^2 - a_0 a_2)^2 > 0,$$

et toutes les racines de la dérivée de l'ordre $(n-4)$ de cette équation sont imaginaires.

(Michael Roberts.)

731. Démontrer qu'en éliminant f entre les équations

$$4(ae - 4bd + 3c^2)(bf - 4ce + 3d^2) - (af - 3be + 2cd)^2 = 0,$$
$$3[a^2(c^2 - df) + 3ab(cf - de) + 4ac(d^2 - ce)$$
$$+ 2b^2(d^2 - bf) + 5b^2ce + 3c^4 - 8bc^2d] - (ae - 4bd + 3c^2)^2 = 0,$$

on est conduit à l'un ou l'autre des résultats

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2 = 0,$$
$$a^2(ae - 4bd + 3c^2) - 3(b^2 - ac)^2 = 0.$$

(Michael Roberts.)

732. En posant

$$H = a_1^2 - a_0 a_2,$$
$$I = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$
$$J = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3,$$
$$K = 4(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)(a_1 a_5 - 4 a_2 a_4 + 3 a_3^2)$$
$$- (a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3)^2,$$
$$L = a_0^2(a_4^2 - a_3 a_5) + 3 a_0 a_1 (a_2 a_5 - a_3 a_4) + 4 a_0 a_2 (a_3^2 - a_2 a_4)$$
$$+ 2 a_1^2 (a_3^2 - a_1 a_5) + 5 a_1^2 a_2 a_4 + 3 a_2^4 - 8 a_1 a_2^2 a_3,$$

démontrer la relation suivante

$$a_0^2 L^2 = 4H[H(I^3 - 9J^2 - 2IL - HK) + a_0 J(3L - I^2)] + a_0^2 K(HI + a_0 J) + a_0^2 I(12J^2 + 2IL - I^3).$$

(MICHAEL ROBERTS.)

733. Si les six points P, Q, A, B, C, D sont sur une même conique, les points d'intersection des droites PA, QB; PB, QA; PC, QD; PD, QC sont sur une conique qui passe par les points P et Q. (CAYLEY.)

734. Trouver la condition pour qu'une asymptote d'une conique donnée par l'équation générale du second degré passe par l'origine. (SALMON.)

735. Le lieu des centres des coniques tangentes aux côtés d'un triangle, et telles, que les normales menées par les points de contact se rencontrent en un même point, est une courbe du troisième degré qui passe par les sommets du triangle, le centre de gravité, le point d'intersection des hauteurs, les centres des cercles inscrits et exinscrits, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs (*).

(THOMSON.)

736. Soit M un point d'une courbe, et M_1 le point correspondant de sa transformée par rayon vecteur réciproque par rapport à un point O; n, n_1 les longueurs des normales à ces deux courbes comprises entre les points M et M_1, et une perpendiculaire à OM menée par le point O; enfin, ρ et ρ_1 les rayons de courbure aux points M et M_1. On aura

$$\frac{n}{\rho} + \frac{n_1}{\rho_1} = 2.$$

(NICOLAÏDÈS.)

(*) Cette question et les deux précédentes sont extraites du journal *The educational Times*, août 1864.

ANALOGIES DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE;

PAR M. PAUL SERRET.

Les problèmes qui font l'objet de cet article reçoivent un double intérêt des difficultés analytiques qu'ils présentent et de leur construction géométrique jusqu'ici inachevée. On connaît depuis longtemps cette analogie, dont le premier terme est dû à Newton : « Le lieu des centres des ellipses inscrites à un quadrilatère étant une droite, le lieu des centres des ellipsoïdes inscrits à un système de sept plans est un plan »; et cette autre, due pour la première moitié à Steiner, pour la seconde à M. Mention : « Le lieu des centres des ellipses, inscrites à un triangle et dont la somme des carrés des axes demeure constante, étant un cercle; le lieu des centres des ellipsoïdes inscrits à un système de six plans, et dont la somme des carrés des axes est constante, est une sphère ». Il restait à compléter ces analogies; et, comme on sait construire dans le plan la droite ou le cercle des centres, à construire aussi dans l'espace le plan ou la sphère des centres, à l'aide des plans donnés. Question difficile, dont une solution imprévue pouvait naître, sans doute, de la Géométrie, ou du hasard; mais qui paraissait se dérober au calcul. Si l'on aborde, en effet, par la voie analytique ordinaire, la détermination de l'un quelconque des lieux géométriques précédents, on se trouve, dès le début, en présence d'éliminations à peu près irréalisables. Et bien que l'on puisse en venir à bout à l'aide de certaines relations dites d'identité, calculées d'abord par M. Terquem

pour les courbes du second ordre, par M. Mention pour les surfaces; l'extrême complication des calculs permet seulement de reconnaître, dans chaque cas, la nature du lieu. C'est ainsi que M. Mention a pu constater l'existence d'une sphère des centres, analogue au cercle de Steiner; mais sans apercevoir la position du centre de cette sphère par rapport aux six plans donnés.

On peut traiter tous ces problèmes par une méthode directe, n'exigeant que très-peu de calcul et prenant son point de départ dans l'interprétation géométrique des équations de la tangente à l'ellipse, ou du plan tangent à l'ellipsoïde, rapportés à leurs axes de figure; équations bien connues et que l'on peut transporter ensuite à des axes quelconques. On est ainsi conduit, pour les lieux analogues de la Géométrie des courbes et des surfaces du second ordre, à des équations de même forme, telles que

$$\sum_1^4 \lambda P^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sum_1^7 \lambda P^2 = 0,$$

ou encore

$$\sum_1^3 \lambda P^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Et cette similitude, déjà remarquable par elle-même, présente en outre ici cet avantage, que les considérations à l'aide desquelles on peut, dans le plan, déduire de la seule forme de son équation la position du lieu des centres par rapport aux données géométriques de la question, se trouvent naturellement indiquées comme devant être essayées aussi quand on aura à étudier la position du lieu correspondant de l'espace. Or, il arrive que cet essai réussit; et que ces mêmes considérations suffisent pour faire apparaître tous les détails de position, essentiels ici, qui paraissaient d'abord cachés dans l'équation du

lieu. On parvient de la sorte à une première solution de ce problème : *Construire le centre de l'ellipsoïde défini par neuf plans tangents.*

I.

1. L'ellipse $(2a, 2b)$ étant rapportée à ses axes de figure, l'une quelconque de ses tangentes peut être représentée par l'équation connue

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}:$$

α désignant l'inclinaison sur l'axe $2a$ de la normale correspondante N, et $P = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$ la distance du centre de l'ellipse à la tangente. Traduisant cette valeur de P en langage ordinaire, on peut dire que *le carré de la distance du centre de l'ellipse à l'une quelconque de ses tangentes est égal à la somme des carrés des produits de chacun des demi-axes de la courbe par le cosinus de l'angle formé par la direction de cet axe avec la normale correspondante* N :

$$P^2 = a^2\cos^2(N, a) + b^2\cos^2(N, b);$$

et cette formule est ensuite applicable, comme nous allons le voir, à un système quelconque d'axes coordonnés.

2. *Du lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère donné.* — Soient, par rapport à un système quelconque d'axes rectangulaires,

$$o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4,$$

les quatre côtés du quadrilatère donné; chacune des fonctions P étant de la forme

$$P = Ax + By - p,$$

où A et B désignent les cosinus des angles formés avec *ox* et *oy* par la normale N à la droite correspondante, ou les *cosinus directeurs* de cette normale.

Si l'on désigne de même par α et β, α' et β' les cosinus directeurs de chacun des axes $2a$ ou $2b$ d'une ellipse tangente aux quatre droites; on aura, pour le carré de la distance du centre (xy) de cette ellipse à chacune de ces droites, cette double expression :

$$P^2 = (Ax + By - p)^2 = a^2\cos^2(N, a) + b^2\cos^2(N, b),$$

ou, en développant les cosinus,

$$P^2 = (Ax + By - p)^2 = a^2(A\alpha + B\beta)^2 + b^2(A\alpha' + B\beta')^2.$$

Appliquant cette relation à chacune des quatre tangentes données, il vient :

$$1^\circ\ P_1^2 = (A_1x + B_1y - p_1)^2 = a^2(A_1\alpha + B_1\beta)^2 + b^2(A_1\alpha' + B_1\beta')^2,$$
$$2^\circ\ P_2^2 = (A_2x + B_2y - p_2)^2 = a^2(A_2\alpha + B_2\beta)^2 + b^2(A_2\alpha' + B_2\beta')^2,$$
$$3^\circ\ P_3^2 = (A_3x + B_3y - p_3)^2 = a^2(A_3\alpha + B_3\beta)^2 + b^2(A_3\alpha' + B_3\beta')^2,$$
$$4^\circ\ P_4^2 = (A_4x + B_4y - p_4)^2 = a^2(A_4\alpha + B_4\beta)^2 + b^2(A_4\alpha' + B_4\beta')^2,$$

et la détermination du lieu des centres est ramenée à l'élimination entre ces quatre équations des trois paramètres indépendants auxquels se réduisent les six variables a, b, α, β, α', β'.

Or, cette élimination se réalise aisément, en vertu d'un mode particulier de symétrie que présentent les équations 1°, 2°, 3°, 4° et d'après lequel les quantités

$$a^2\alpha^2 \text{ et } b^2\alpha'^2, \quad a^2\beta^2 \text{ et } b^2\beta'^2, \quad a^2\alpha\beta \text{ et } b^2\alpha'\beta'$$

entrant de la même manière dans toute combinaison de ces équations, il suffira de rendre nuls les coefficients des termes en

$$a^2\alpha^2, \quad 2a^2\alpha\beta, \quad b^2\beta^2$$

dans l'équation résultant de cette combinaison, pour voir disparaître toutes les variables.

Si l'on désigne, dès lors, par λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 quatre coefficients indéterminés dont les rapports soient définis par les relations suivantes :

$$(\lambda)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \lambda_3 A_3^2 + \lambda_4 A_4^2 = 0, \\ \lambda_1 B_1^2 + \lambda_2 B_2^2 + \lambda_3 B_3^2 + \lambda_4 B_4^2 = 0, \\ \lambda_1 A_1 B_1 + \lambda_2 A_2 B_2 + \lambda_3 A_3 B_3 + \lambda_4 A_4 B_4 = 0, \end{aligned} \right.$$

et qu'ayant multiplié les équations 1°, 2°, 3°, 4° respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, on les ajoute membre à membre : le second membre de l'équation résultante sera identiquement nul, en vertu des relations (λ) ; tous les paramètres variables se trouveront éliminés, et l'équation du lieu sera

$$(I)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1 (A_1 x + B_1 y - p_1)^2 + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y - p_2)^2 \\ &\quad + \lambda_3 (A_3 x + \ldots)^2 + \lambda_4 (A_4 x + \ldots)^2 = 0, \\ &\qquad \text{ou} \quad \sum_1^4 \lambda P^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, et en vertu des mêmes relations (λ), les termes en x^2, y^2, xy disparaissent d'eux-mêmes du premier membre de cette équation qui représente, dès lors, une droite ; et l'on a ce théorème :

Quatre droites étant données

$$o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4,$$

le lieu des centres des coniques tangentes à ces quatre droites est la droite unique représentée par l'équation

$$(1)\qquad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 = 0,$$

rendue linéaire en x, y, par un choix convenable des coefficients.

Remarque I. — Quels que soient l'angle des axes et

la forme des fonctions P, la droite des centres demeure représentée par l'équation (1); ou, en choisissant deux des quatre droites données pour axes des x et des y, par celle-ci :

$$(1') \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 + \lambda'\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1\right)^2 = 0,$$

les coefficients α, β, λ, λ' étant toujours choisis de manière à produire la disparition des termes en x^2, y^2 et xy. Il serait donc facile de vérifier, conformément au théorème de Newton, que la *ligne des centres* se confond avec la *droite des milieux des diagonales* du quadrilatère formé par les quatre tangentes. Mais cette vérification est, en réalité, inutile; et la position de la droite des centres est en évidence dans l'équation (1).

Remarquons, en effet, la ligne (1) étant traitée comme une courbe du second ordre, que la polaire, prise par rapport à cette ligne, d'un point quelconque (p_1, p_2, p_3, p_4), est représentée par l'équation

$$\lambda_1 p_1 . P_1 + \lambda_2 p_2 . P_2 + \lambda_3 p_3 . P_3 + \lambda_4 p_4 . P_4 = 0,$$

et que cette équation se réduit, par l'hypothèse $o = p_1 = p_2$, à

$$\lambda_3 p_3 . P_3 + \lambda_4 p_4 . P_4 = 0.$$

De là cette conclusion : *La polaire*, prise par rapport à la ligne des centres de *l'un quelconque des sommets* du quadrilatère formé par les quatre tangentes $(o = p_1 = p_2)$, *passe par le sommet opposé* $(o = P_3 = P_4)$.

Or, dans toute courbe du second ordre, les rayons menés du pôle à la polaire sont divisés harmoniquement par la courbe; et, si celle-ci se réduit à une droite D, ou au système formé de cette droite D et de la *droite à l'infini*, les rayons menés du pôle à la polaire sont divisés en deux parties égales par cette droite D. Il résulte de là,

en revenant au quadrilatère précédent, que le rayon mené de chaque sommet au sommet opposé est divisé en deux parties égales par la droite des centres : ou que celle-ci coïncide avec la droite des milieux des diagonales du quadrilatère.

La propriété dont nous venons de faire usage, des *pôles et polaires par rapport à une droite*, résulterait encore de la triple substitution

$$o = a = b = c$$

introduite dans les équations

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$(ax' + by' + d)x + (bx' + cy' + e)y + (dx' + ey' + f) = 0,$$

d'une courbe du second ordre et de la polaire d'un point (x', y') par rapport à cette courbe.

Remarque II. — Une conique étant définie par les cinq tangentes

$$o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5,$$

l'équation

$$\sum_1^5 \lambda P^2 = 0,$$

rendue linéaire à l'aide des coefficients, représente le faisceau des diamètres de cette conique.

3. *Du lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et dont la somme des carrés des axes est assujettie à demeurer constante.* — Les côtés du triangle étant représentés par les équations

$$o = P_1 = P_2 = P_3,$$

et toutes les notations du numéro précédent conservées, la détermination du lieu des centres dépendra de l'élimi-

nation des trois paramètres indépendants, auxquels se réduisent les six variables a, b, α, β, α', β' entre ces quatre équations :

$$1^\circ\quad P_1^2=(A_1x+B_1y-p_1)^2=a^2(A_1\alpha+B_1\beta)^2+b^2(A_1\alpha'+B_1\beta')^2,$$
$$2^\circ\quad P_2^2=(A_2x+B_2y-p_2)^2=a^2(A_2\alpha+B_2\beta)^2+b^2(A_2\alpha'+B_2\beta')^2,$$
$$3^\circ\quad P_3^2=(A_3x+B_3y-p_3)^2=a^2(A_3\alpha+B_3\beta)^2+b^2(A_3\alpha'+B_3\beta')^2,$$
$$4^\circ\quad a^2+b^2=k^2=\text{const.}$$

Or, si l'on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois coefficients définis par les conditions suivantes :

$$(\lambda)\quad \begin{cases} \lambda_1A_1^2+\lambda_2A_2^2+\lambda_3A_3^2=1,\\ \lambda_1B_1^2+\lambda_2B_2^2+\lambda_3B_3^2=1,\\ \lambda_1A_1B_1+\lambda_2A_2B_2+\lambda_3A_3B_3=0,\end{cases}$$

et que, multipliant les équations 1, 2, 3 respectivement par les nombres actuellement déterminés λ_1, λ_2, λ_3, on les ajoute membre à membre : le second membre de l'équation résultante se réduit, en vertu des relations (λ), à

$$(a^2\alpha^2+a^2\beta^2)+(b^2\alpha'^2+b^2\beta'^2)=a^2(\alpha^2+\beta^2)+b^2(\alpha'^2+\beta'^2)=a^2+b^2;$$

toutes les variables se trouvent éliminées, et l'équation du lieu est

$$(\text{II})\quad \begin{cases} \lambda_1(A_1x+B_1y-p_1)^2+\lambda_2(A_2x+B_2y-p_2)^2\\ \quad+\lambda_3(A_3x+B_3y-p_3)^2=a^2+b^2=\text{const.},\\ \text{ou}\quad \sum_1^3\lambda P^2=a^2+b^2=\text{const.}\end{cases}$$

D'ailleurs, les termes du second degré de cette équation se réduisant, en vertu des mêmes relations (λ), à x^2+y^2, le lieu considéré est un cercle, et l'on a ce théorème :

Étant données trois droites

$$o=P_1=P_2=P_3,$$

le lieu des centres des coniques tangentes à ces droites, et dont la somme des carrés des axes demeure constante, est le cercle unique représenté par l'équation

$$(2)\qquad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = a^2 + b^2 = \text{const.},$$

réduite à la forme circulaire $x^2 + y^2 + \ldots$ par un choix convenable des coefficients.

Remarque I. — L'angle des axes devenant quelconque, l'équation précédente est encore applicable. On pourra donc prendre pour axes des x, y deux des trois tangentes données; et le lieu des centres demeurera représenté par l'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \lambda\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1\right)^2 = a^2 + b^2,$$

ramenée toujours à la forme $x^2 + y^2 + 2xy\cos(x,y) + \ldots$ par un choix convenable des coefficients. La détermination du *centre* du cercle en résulterait aisément; et l'on vérifierait, conformément au théorème de Steiner, qu'il coïncide avec le *point de rencontre des hauteurs* du triangle formé par les trois tangentes données. Mais cette vérification serait ici superflue, la position du centre étant en évidence dans l'équation (2) : aussitôt, du moins, que l'on y suppose nulle la constante $a^2 + b^2$, ce qui ne change rien à la position du point que l'on cherche.

Posons, en effet,

$$a^2 + b^2 = 0;$$

l'équation (2) prend la forme homogène

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = 0.$$

Or, il résulte immédiatement de cette forme que le triangle

$$o = P_1 = P_2 = P_3$$

est polairement conjugué à la courbe représentée par cette équation : cette courbe, d'ailleurs, est un cercle; le centre de ce cercle coïncide donc avec le point de rencontre des hauteurs de ce triangle.

Remarque II. — Le lieu des centres des hyperboles équilatères

$$a^2 - b^2 = 0$$

inscrites à un triangle, est le cercle conjugué de ce triangle : ce cercle, d'ailleurs, est réel, se réduit à un point, ou devient imaginaire, suivant que le triangle proposé est obtusangle, rectangle, ou acutangle.

Remarque III. — Les centres des hyperboles équilatères définies par quatre tangentes appartiennent à chacun des quatre cercles conjugués aux triangles formés de trois de ces tangentes. Ces quatre cercles se coupent dans les deux mêmes points, centres de deux hyperboles répondant à la question; et la droite qui les réunit se confond avec la droite des milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre tangentes.

Remarque IV. — Le théorème de Newton peut être considéré comme une conséquence du théorème de Steiner. Si l'on désigne, en effet, par $a^2 + b^2$ la somme des carrés des axes de l'une quelconque des coniques tangentes aux quatre droites $0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4$, le centre de cette conique appartenant, d'après ce dernier théorème, à chacun des deux *cercles*

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = a^2 + b^2,$$
$$\mu_2 P_2^2 + \mu_3 P_3^2 + \mu_4 P_4^2 = a^2 + b^2,$$

appartiendra aussi à leur *axe radical* représenté par l'équation

$$\lambda_1 P_1^2 + (\lambda_2 - \mu_2) P_2^2 + (\lambda_3 - \mu_3) P_3^2 - \mu_4 P_4^2 = 0,$$

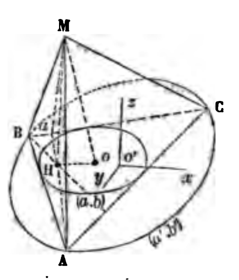
ou

$$\lambda'_1 P_1^2 + \lambda'_2 P_2^2 + \lambda'_3 P_3^2 + \lambda'_4 P_4^2 = 0,$$

et le lieu des centres n'est autre que la *droite unique et déterminée* représentée par cette équation.

Remarque V. — Le théorème de Steiner admet cette autre démonstration, indirecte, puisqu'elle est fondée sur des considérations empruntées de la Géométrie de l'espace, mais tellement simple, que nous croyons pouvoir nous y arrêter un moment.

On sait, suivant le théorème de Monge, que le lieu décrit par le sommet d'un trièdre trirectangle circonscrit à



l'ellipsoïde est une sphère concentrique, dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des demi-axes de l'ellipsoïde : $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Or, si le troisième axe $2c$ de l'ellipsoïde diminue graduellement et tend vers zéro, le théorème subsiste toujours et se transforme, à la limite, en celui-ci : *Le lieu décrit par le sommet d'un trièdre trirectangle circonscrit à l'ellipse est une sphère concentrique dont le rayon est égal à la racine carrée de la somme des carrés des demi-axes de l'ellipse* : $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. C'est, d'ailleurs, ce que l'on vérifierait, par un calcul direct, en formant l'équation

d'un cône quelconque mené suivant la courbe :

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et déterminant la position du sommet de ce cône par la condition que trois de ses plans tangents forment un trièdre trirectangle. La somme des carrés des axes d'une ellipse est donc représentée géométriquement par le carré de la distance du centre de la courbe au sommet de l'un quelconque des trièdres trirectangles circonscrits. Si l'on cherche, dès lors, le lieu des centres o des ellipses inscrites au triangle donné ABC et dont la somme des carrés des axes est assujettie à demeurer constante; on verra, le triangle circonscrit ABC étant donné, qu'il en est de même du sommet M du trièdre trirectangle construit sur ce triangle comme base; que la distance $Mo = \sqrt{a^2 + b^2}$ est donnée, et que le centre o de l'ellipse inscrite décrit un cercle ayant pour centre la projection du sommet fixe M sur le plan ABC, ou le point de rencontre H des hauteurs du triangle ABC : ce qui est la partie essentielle du théorème de Steiner.

La somme des carrés des axes d'une ellipse inscrite à un triangle est d'ailleurs susceptible d'une autre représentation. De l'égalité $a^2 + b^2 = \overline{oM}^2$, on déduit, en effet,

$$a^2 + b^2 = \overline{oH}^2 + \overline{HM}^2;$$

ou, en remarquant que le triangle aMA est rectangle en M, et que les segments Ha, HA sont, dans la figure, de sens opposés ou de signes contraires,

$$a^2 + b^2 = \overline{oH}^2 - Ha \,.\, HA = \overline{oH}^2 - \beta^2;$$

β désignant le rayon, imaginaire dans la figure, du cercle

conjugué du triangle ABC. Or, le centre de ce cercle était le point H lui-même, la relation

$$a^2 + b^2 = \overline{oH}^2 - \beta^2,$$

exprime que *la somme des carrés des axes d'une ellipse inscrite à un triangle* est mesurée par *la puissance du centre de la courbe par rapport au cercle conjugué du triangle.* Et c'est ce qui résulte immédiatement de l'équation (2).

Remarque VI. — L'ellipse précédente, de centre o, inscrite au triangle ABC, étant projetée sur le plan de chacune des faces latérales du trièdre trirectangle MABC, donne naissance à trois ellipses, inscrites à chacun des triangles rectangles AMB, BMC, CMA, ayant respectivement pour centre la projection du centre primitif o sur le plan de chacune des faces, et dont la somme des carrés des axes est mesurée par le carré de la distance de cette projection au sommet M. De là, en désignant par x, y, z les coordonnées du centre primitif o par rapport au trièdre M; par a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 les demi-axes des trois ellipses secondaires, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= x^2 + y^2, \\ a_2^2 + b_2^2 &= y^2 + z^2, \\ a_3^2 + b_3^2 &= z^2 + x^2; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(a^2 + b^2),$$

relation élégante, que l'on doit à M. Prouhet, mais qui n'avait pas été établie d'une manière aussi simple.

Remarque VII. — Le théorème de Monge, appliqué à l'ellipse, conduit encore aisément à la solution de ce problème : Un triangle variable ABC demeurant inscrit et

circonscrit à deux coniques fixes (a', b'), (a, b), trouver le lieu décrit par le point de rencontre H des hauteurs de ce triangle (Burnside-Salmon).

Conservant, en effet, la figure et les notations précédentes, on a d'abord

$$\overline{oH}^2 + \overline{HM}^2 = a^2 + b^2;$$

ou, en appelant x, y et α, β les coordonnées, relatives à un même système d'axes, du point de rencontre des hauteurs du triangle et du centre o de l'ellipse inscrite,

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = a^2 + b^2,$$

a et b désignant, en outre, les axes principaux de l'ellipse inscrite; et x, y, z les coordonnées du sommet du trièdre trirectangle construit sur ABC comme base.

D'un autre côté, si l'on désigne par a', b' les demi-axes de l'ellipse circonscrite au triangle ABC, et que l'on cherche le lieu des sommets des trièdres trirectangles inscrits à cette ellipse, ou le lieu des sommets des cônes s'appuyant sur l'ellipse (a', b') et ayant trois de leurs génératrices rectangulaires; on trouve, pour équation de ce lieu,

$$(2) \qquad \left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1\right) + z^2\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right) = 0,$$

les axes des x, y, indéterminés jusqu'ici, étant maintenant les axes mêmes de l'ellipse (a', b').

Le sommet xyz du trièdre trirectangle construit sur le triangle variable ABC décrit donc dans l'espace la courbe d'intersection des surfaces (1) et (2); et l'équation de la courbe décrite par sa projection (xy) sur le plan du triangle variable ABC, ou par le point de rencontre H des hauteurs de ce triangle, résultera de l'élimination de z

entre les équations (1) et (2). On obtient ainsi

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1\right)\\ &-[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(a^2+b^2)]\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}\right)=0, \end{aligned} \right.$$

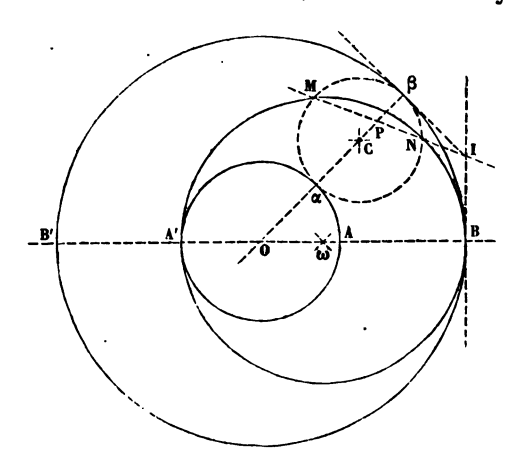
équation d'une conique, semblable à l'ellipse *circonscrite* au triangle mobile, dont les axes majeur et mineur sont respectivement perpendiculaires aux axes mineur et majeur de cette ellipse; et dont la forme et la position ne dépendent que de la *position* du centre de l'ellipse *inscrite* au triangle, et de la somme des carrés de ses axes.

(*La suite prochainement.*)

SECTIONS CIRCULAIRES DU TORE;

PAR M. A. GODART.

O est le centre du tore. OA, OB sont les rayons des



cercles de la section par le plan de l'équateur.

Sur A′B comme diamètre, décrivons un cercle dont le centre sera ω. Concevons une sphère dont ω serait un grand cercle, et cherchons la courbe d'intersection de cette sphère avec le tore.

Imaginons une des sphères génératrices du tore dont le centre serait en C, et qui toucherait le tore suivant un cercle projeté sur $\alpha\beta$.

MN est la projection du cercle commun aux sphères C et ω.

Le point de ce cercle projeté en P appartient à l'intersection de la sphère ω et du tore.

Les tangentes en β et en B au cercle O et la droite MN se coupent en un même point I; car ces droites sont les cordes communes aux trois cercles O, C et ω.

De ce que le point I se meut sur une droite fixe, nous concluons que MN enveloppe une courbe homologique du cercle O (*), le point O étant le centre et BI l'axe d'homologie.

P se trouvant sur $\alpha\beta$ est le point de contact de MN avec son enveloppe.

Le lieu des points P est donc une ellipse tangente en A et B au cercle O.

Cette ellipse est la projection de deux grands cercles de la sphère ω, suivant lesquels elle rencontre le tore.

Le plan qui passe par l'un de ces cercles contient un second cercle du tore, décrit sur AB′ comme diamètre.

Ce plan touche le tore aux deux points d'intersection de ces cercles.

Tout plan bitangent coupe donc le tore suivant deux cercles.

(*) Poncelet, *Traité des Propriétés projectives des figures*, Section III.

SUR LES CERCLES BITANGENTS A UNE CONIQUE;

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

La considération des cercles bitangents à une conique conduit très-brièvement à la détermination des axes principaux en grandeur et en direction, et par suite à celle des foyers, sans qu'il soit besoin d'employer une définition analytique qui introduit les imaginaires sans avantages apparents.

Soit

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

l'équation d'une conique rapportée à des axes faisant l'angle θ.

Soit

$$(2) \qquad x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 1$$

l'équation d'un cercle de même centre. En égalant les dérivées de y fonction de x, prises dans les deux équations, on a

$$(3) \qquad \frac{x + y\cos\theta}{x\cos\theta + y} = \frac{Ax + By}{Bx + Cy},$$

ce qui revient à

$$(4) \quad (C\cos\theta - B)y^2 - (A - C)xy - (A\cos\theta - B)x^2 = 0.$$

Cette équation homogène est satisfaite par les coordonnées des foyers et des sommets qui sont situés sur un même axe.

Si l'on pose $y = tx$, on a l'équation

$$(5) \quad (C\cos\theta - B)t^2 - (A - C)t - (A\cos\theta - B) = 0.$$

C'est l'équation aux directions des axes principaux. Ces deux racines étant t et t', on vérifie immédiatement la condition

$$1 + (t + t')\cos\theta + tt' = 0,$$

qui montre que les deux directions sont perpendiculaires.

La résolution donne

$$2(C\cos\theta - B)t - (A - C)$$
$$= \pm\sqrt{(A - C)^2 + 4(A\cos\theta - B)(C\cos\theta - B)}.$$

En remplaçant $(A - C)^2$ par $(A - C)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$, on a pour valeur du radical

$$\sqrt{(A - C)^2\sin^2\theta + [(A + C)\cos\theta - 2B]^2},$$

quantité toujours réelle.

Le moyen le plus simple pour trouver le carré r^2 d'un demi-axe principal, c'est d'écrire l'équation (3) sous la forme

$$\frac{x + y\cos\theta}{Ax + By} = \frac{x\cos\theta + y}{Bx + Cy} = \frac{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = r^2,$$

la troisième expression s'obtenant en multipliant par x les deux termes de la première fraction, par y les deux termes de la seconde, et ajoutant ces fractions terme à terme, méthode que Cauchy employait souvent.

L'équation multiple précédente conduit aux deux suivantes :

$$(Br^2 - \cos\theta)x = (1 - Cr^2)y, \quad (Br^2 - \cos\theta)y = (1 - Ar^2)x;$$

la multiplication membre à membre donne

$$(Br^2 - \cos\theta)^2 = (1 - Ar^2)(1 - Cr^2)$$

ou, réduction faite,

$$(6) \quad (AC - B^2)r^4 - (A + C - 2B\cos\theta)r^2 + \sin^2\theta = 0.$$

Il est à remarquer que la résolution donne

$$r^2 = \frac{A+C-2B\cos\theta \pm \sqrt{(A+C-2B\cos\theta)^2 - 4(AC-B^2)\sin^2\theta}}{2(AC-B^2)}:$$

Si l'on développe le carré et que l'on remplace $(A+C)^2$ par $(A+C)^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$, on trouve encore le radical

$$\sqrt{(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2}.$$

On peut remarquer, en passant, que pour $B = 0$ l'équation (6) devient

$$r^4 - \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{C}\right)r^2 + \frac{\sin^2\theta}{AC} = 0,$$

d'où résultent immédiatement les deux théorèmes d'Apollonius.

L'équation (6) donne pour différence des deux valeurs de r^2, différence qui devient une somme dans le cas de l'hyperbole,

$$\frac{\sqrt{(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2}}{AC-B^2}:$$

c'est précisément le carré de la distance d'un foyer au centre. On a donc

$$(AC-B^2)(x^2+2xy\cos\theta+y^2)$$
$$= \sqrt{(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2},$$

ou encore, en remplaçant le radical par sa valeur donnée plus haut,

$$(7)\quad \begin{cases} (AC-B^2)xy(x^2+2xy\cos\theta+y^2) \\ = \pm[(C\cos\theta - B)y^2 + (A\cos\theta - B)x^2], \end{cases}$$

seconde relation entre les coordonnées des foyers.

Si dans l'équation (1) A, B, C étaient fonctions d'une

variable m, en éliminant cette variable au moyen des équations (4) et (7) on aurait le lieu des foyers.

Soit proposé comme application de trouver le lieu des foyers des coniques ayant pour équation

$$\frac{mx^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{am+b}{4},$$

ou, en remplaçant a et b par $2a$ et $2b$,

$$\frac{bm}{ab(am+b)}x^2+\frac{a}{ab(am+b)}y^2=1,$$

et supposant d'ailleurs que les axes des coordonnées font l'angle θ.

L'équation (4), où l'on fera $B=0$, donnera d'abord

$$\frac{A}{C}=\frac{y(y\cos\theta+x)}{x(x\cos\theta+y)},$$

et par suite

$$m=\frac{a}{b}\cdot\frac{y(y\cos\theta+x)}{x(x\cos\theta+y)};$$

puis, l'équation (7) devenant

$$ACxy(x^2+2xy\cos\theta+y^2)=\pm(Cy^2+Ax^2)\cos\theta,$$

donnera, par la substitution des valeurs de A et C, et en supprimant le facteur $x^2+2xy\cos\theta+y^2$ commun aux deux membres,

$$\begin{aligned}&xy(x\cos\theta+y)(y\cos\theta+x)\\&=\pm\cos^2\theta\left(a^2y^2+\frac{a^2+b^2}{\cos\theta}xy+b^2x^2\right),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, au double signe près, l'équation donnée à la page 362 du tome III (2ᵉ série) des *Nouvelles Annales*.

Il est à remarquer que cette équation est du troisième degré en x et y; en se donnant x, y prendra une valeur

réelle, quel que soit le signe adopté : de là une valeur réelle pour m, de sorte que les équations (4) et (7) se trouveront satisfaites.

Il serait bon d'examiner si la définition du foyer (un cercle de rayon nul, etc.) peut donner les deux signes, bien qu'un seul se trouve dans la solution qu'a donnée de ce problème un de nos savants professeurs.

NOTE

sur les équations qui contiennent des fonctions linéaires de coordonnées rectilignes ;

PAR M. DIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

On discute les équations où il n'entre que trois fonctions de la forme $ax + by + cz + d$, comme si ces fonctions étaient de simples coordonnées. Cela peut s'étendre à des équations contenant des fonctions de cette espèce en nombre quelconque.

Soit

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

l'équation proposée, $X_1, X_2, \ldots$ désignant les fonctions linéaires

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \ldots.$$

I. Supposons d'abord que trois au moins des plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots,$$

passent par un même point. Si

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

remplissent cette condition, on aura

$$X_4 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta,$$
$$X_5 = \alpha' X_1 + \beta' X_2 + \gamma' X_3 + \delta',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

quels que soient x, y, z, en prenant pour α, β,..., α', β',... la solution des équations

$$a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = a_4,$$
$$b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma = b_4,$$
$$c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = c_4,$$
$$\delta = d_4 - d_1\alpha - d_2\beta - d_3\gamma,$$

et celles des systèmes qui se déduisent de celui-ci par le changement de a_4, b_4, c_4, d_4 en a_5, b_5, c_5, d_5, etc.

Tous ces systèmes sont possibles et à solution unique, car le déterminant des trois premières équations de chacun, dont la quatrième seulement contient δ, δ',... ou $\delta^{(n-4)}$, est précisément le déterminant des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0,$$

lequel diffère de zéro d'après l'hypothèse faite sur les plans que ces équations représentent.

Il est clair que la substitution a X_4,..., X_n de leurs expressions en X_1, X_2, X_3 conduira à une équation ne contenant plus que ces trois fonctions.

II. Supposons à présent que parmi les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots,$$

il ne s'en trouve pas trois qui passent par un même point, mais que deux au moins de ces plans ne soient pas parallèles. Si les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

se coupent, un des autres plans sera parallèle à l'un ou

à l'autre, ou bien les coupera tous deux suivant des droites parallèles à leur intersection.

Dans le premier de ces deux cas, c'est-à-dire quand $X_3 = o$ sera parallèle à $X_1 = o$, par exemple, on aura évidemment, quels que soient x, y, z,

$$X_3 = \alpha X_1 + \beta$$

pour de certaines valeurs de α, β.

Lorsque $X_3 = o$ coupera $X_1 = o$ et $X_2 = o$, on aura

$$X_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma,$$

quels que soient x, y, z, en prenant pour α, β la solution des équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3,$$
$$b_1\alpha + b_2\beta = b_3,$$

et pour γ la valeur

$$\gamma = d_3 - d_1\alpha - d_2\beta,$$

si l'on a

$$a_1b_2 - b_1a_2 \gtrless o.$$

Dans ce cas, en effet, l'hypothèse sur les plans

$$X_1 = o, \quad X_2 = o, \quad X_3 = o$$

conduit à

$$\frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1c_3 - c_1a_3} = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{b_1c_3 - c_1b_3},$$

d'où il suit que les valeurs en question de α, β satisfont à la condition d'identité qui reste, savoir :

$$c_1\alpha + c_2\beta = c_3.$$

Si l'on a

$$a_1b_2 - b_1a_2 = o,$$

on doit avoir aussi

$$a_1b_3 - b_1a_3 = o,$$

car l'intersection des deux premiers plans étant parallèle au plan xy, il doit en être de même de l'intersection du premier et du troisième; les équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3, \quad b_1\alpha + b_2\beta = b_3$$

se réduisent donc à une seule. Mais alors on a

$$a_1c_2 - c_1a_2 \gtrless 0,$$

car sans cela les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

seraient parallèles; α et β seront donc déterminés par les équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3,$$
$$c_1\alpha + c_2\beta = c_3.$$

Les mêmes raisonnements s'appliquent à X_4, $X_5, \ldots$; ainsi l'équation proposée se ramènera à une autre ne contenant que X_1, X_2.

Enfin, on voit que si tous les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \ldots,$$

étaient parallèles entre eux, on aurait

$$X_2 = \alpha X_1 + \beta, \quad X_3 = \alpha' X_1 + \beta', \ldots,$$

en sorte qu'on arriverait à une équation ne contenant que X_1.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 619

(voir 2e série, t. I, p. 170);

PAR M. E. COLOT.

1° *La surface représentée par le système des trois équations*

$$x = \frac{c^2 - b^2}{bc} \frac{RR'}{R + R'},$$

$$y = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b} \frac{R'\sqrt{b^2 - R^2}}{R + R'},$$

$$z = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} \frac{R\sqrt{R'^2 - c^2}}{R + R'}$$

est une cyclide; R, R′ *sont les rayons de courbure principaux de la surface au point* x, y, z.

2° *Supposons qu'une famille de courbes situées sur cette cyclide soit représentée par l'équation différentielle*

$$p\,dR + q\,dR' = 0,$$

les courbes, coupant orthogonalement celles du système donné, seront représentées par l'équation

$$\frac{dR}{pR^2(b^2 - R^2)} - \frac{dR'}{qR'^2(R'^2 - c^2)} = 0.$$

3° *L'équation en coordonnées elliptiques de la cyclide dont il s'agit est*

$$\rho - \mu - \nu = 0.$$

(STREBOR.)

1° Les équations de la surface donnent pour les rapports $\frac{y^2}{x^2}$ et $\frac{z^2}{x^2}$ les valeurs

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \frac{b^2 - R^2}{R^2},$$
$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{b^2}{c^2 - b^2} \frac{R'^2 - c^2}{R'^2};$$

R ne dépend que du premier de ces deux rapports, et R' que du second; par conséquent, on obtiendra les courbes $R = \text{const.}$ et $R' = \text{const.}$ en coupant la surface par deux systèmes de plans passant par l'axe OZ et par l'axe OY.

Les équations précédentes reviennent à

$$R^2 = \frac{b^2c^2x^2}{c^2x^2 + (c^2 - b^2)y^2}, \quad R'^2 = \frac{b^2c^2x^2}{b^2x^2 - (c^2 - b^2)z^2},$$

et ces valeurs, substituées dans l'une des trois équations données, conduisent à l'équation de la surface

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(c^2 + b^2)x^2 - 2(c^2 - b^2)y^2 + 2(c^2 - b^2)z^2 + (c^2 - b^2)^2 = 0.$$

On peut se faire une idée assez exacte de cette surface en étudiant quelques-unes de ses sections planes.

Le plan YOZ ne contient que deux points A et B de la surface; ils ont pour coordonnées :

A.... $x = 0, \quad y = -\sqrt{c^2 - b^2}, \quad z = 0,$

B.... $x = 0, \quad y = +\sqrt{c^2 - b^2}, \quad z = 0.$

Le plan ZOX la coupe suivant les deux circonférences

$$y = 0, \quad (x \mp c)^2 + z^2 = b^2,$$

et le plan XOY suivant les deux circonférences

$$z = 0, \quad (x \mp b)^2 + y^2 = c^2.$$

Les plans $y = x \operatorname{tang}\varphi$ qui passent tous par l'axe OZ déterminent dans la surface deux sections circulaires ayant pour équations dans leurs plans

$$z^2 + \left(u \mp \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2\varphi}\right)^2 = b^2 \cos^2\varphi$$

(OU est la trace du plan $y = x \operatorname{tang}\varphi$ sur le plan XOY); ce sont les courbes $R = \text{const.}$

De même, les plans $z = x \operatorname{tang}\psi$ donnent les couples de circonférences

$$y^2 + \left(v \mp \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2\psi}\right)^2 = c^2 \cos^2\psi$$

(OV est la trace du plan $z = x \operatorname{tang}\psi$ sur le plan ZOX); ce sont les courbes $R' = \text{const.}$

Le lieu géométrique des centres des courbes $R = \text{const.}$ a pour équations

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = c^2 x^2 + (c^2 - b^2) y^2;$$

c'est la transformée par rayons vecteurs réciproques de l'ellipse

$$z = 0, \quad c^2 x^2 + (c^2 - b^2) y^2 = c^2 (c^2 - b^2),$$

en prenant l'origine comme pôle et $c\sqrt{c^2 - b^2}$ pour paramètre de transformation. Ce lieu est aussi la podaire de l'ellipse

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1.$$

Le lieu géométrique des centres des courbes $R' = \text{const.}$ a pour équations

$$y = 0, \quad (x^2 + z^2)^2 = b^2 x^2 - (c^2 - b^2) z^2;$$

c'est la transformée de l'hyperbole

$$y = 0, \quad b^2 x^2 - (c^2 - b^2) z^2 = b^2 (c^2 - b^2),$$

ou la podaire de l'hyperbole

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1.$$

A l'aide de tous les résultats que nous venons d'obtenir, on voit facilement que la surface a la forme de deux fuseaux recourbés de manière à avoir leurs pointes en contact aux points A et B, leurs parties renflées autour des points $x = \mp c$, $y = 0$, $z = 0$, et dont les axes s'appliqueraient sur la courbe

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = c^2x^2 + (c^2 + b^2)y^2.$$

La surface proposée est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un cône de révolution; cette transformation s'opère en prenant pour pôle le point A et $2\sqrt{c^2 - b^2}$ pour puissance. Le cône ainsi obtenu a son sommet au point B, son axe parallèle à OX, et ses génératrices font avec l'axe un angle ω, tel que

$$\text{tang}\,\omega = \frac{b}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Le cône est l'enveloppe des sphères inscrites ou l'enveloppe de ses plans tangents. La surface est l'enveloppe des transformées des sphères inscrites ou de celles des plans tangents au cône; c'est donc une *cyclide* pour laquelle, dans le premier mode de génération, les trois sphères fixes sont les transformées de trois plans tangents, et dans le second celles de trois sphères inscrites. Les centres de ces deux séries de sphères sont sur l'ellipse et sur l'hyperbole que nous avons déjà rencontrées :

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1;$$

on peut le démontrer, soit par le calcul, soit par des considérations géométriques très-simples empruntées à la théorie des courbes du second ordre. Ces deux courbes sont l'*ellipse focale* et l'*hyperbole ombilicale* du système de surfaces homofocales du second degré que nous aurons à considérer pour établir l'équation de la surface en coordonnées elliptiques.

La cyclide a deux plans tangents singuliers qui la touchent suivant deux circonférences; ces plans passent par l'axe OY et font avec le plan XOY des angles égaux à ω. Aux points A et B il y a deux cônes de tangentes : l'un est le cône de révolution que nous avons trouvé en transformant la surface, et l'autre est le cône symétrique du premier par rapport au plan ZOX. Cette cyclide jouit encore d'une propriété remarquable : elle appartient à la classe des surfaces que M. Moutard a proposé de nommer *anallagmatiques* (p. 307). En effet, en prenant l'origine comme pôle et $c^2 - b^2$ comme paramètre de transformation, on retombe sur la surface elle-même (*).

Les lignes de courbure du cône sont les génératrices et les sections circulaires; les transformées par rayons vecteurs réciproques de ces lignes seront les lignes de courbure de la surface proposée.

Les génératrices donnent, par la transformation, des circonférences qui passent par les deux points A et B; les plans de ces circonférences passant tous par l'axe OY, elles se confondent avec les courbes $R' =$ const.

Quant aux sections circulaires du cône, elles ont pour

(*) Cette remarque a été faite par M. Mannheim dans sa belle étude sur les cyclides, avant que le mot *anallagmatique* fût inventé. Moi aussi j'ai fait des anallagmatiques sans le savoir, car la surface du quatrième degré, numérotée (8), 2e série, t. II, p. 236, et dont l'intersection avec l'ellipsoïde donne la ligne des courbures semblables, est une surface anallagmatique du quatrième ordre. P.

transformées des circonférences symétriques par rapport au plan XOY. Leurs plans passent tous par l'axe OZ (*). Ce sont les circonférences $R = \text{const.}$

Représentons maintenant par R_1 et R'_1 les rayons de courbure principaux correspondant aux lignes de courbure $R = \text{const.}$ et $R' = \text{const.}$

Le plan $y = x \tang \varphi$ coupe la surface suivant deux cercles ayant pour rayons $b \cos\varphi$, et faisant avec la surface un angle θ, tel que

$$\sin\theta = \frac{b}{c} \sin\varphi;$$

en appliquant le théorème de Meunier on aura donc

$$b \cos\varphi = R_1 \sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2\varphi}{c^2}},$$

$$R_1^2 = \frac{b^2 c^2 \cos^2\varphi}{c^2 - b^2 \sin^2\varphi} = \frac{b^2 c^2 x^2}{c^2 x^2 + (c^2 - b^2) y^2} = R^2.$$

Le plan $z = x \tang \psi$ coupe la surface suivant deux cercles ayant pour rayons $c \cos\psi$, et faisant avec la surface un angle τ donné par la relation

$$\sin\tau = \frac{c}{b} \sin\psi;$$

par suite,

$$R_1'^2 = \frac{b^2 c^2 x^2}{b^2 x^2 - (c^2 - b^2) z^2} = R'^2.$$

Donc, les deux variables R et R' représentent bien les

(*) On le démontre en remarquant qu'il suffit de prouver que les traces de ces plans sur XOY passent par l'origine, ce qu'on fait facilement en s'appuyant sur ce théorème de Géométrie plane élémentaire : *Une circonférence tangente à la corde commune de deux circonférences égales, en un des points communs à ces deux circonférences, les coupe en deux points qui sont en ligne droite avec le milieu de la ligne des centres.*

rayons de courbure principaux au point x, y, z de la cyclide.

2° Les courbes $R = \text{const.}$, $R' = \text{const.}$, étant les lignes de courbure de la surface, sont orthogonales; en désignant par ds l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface, on aura l'équation

$$ds^2 = E\,dR^2 + G\,dR'^2,$$

où

$$E = \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dR}\right)^2$$

et

$$G = \left(\frac{dx}{dR'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dR'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dR'}\right)^2;$$

et l'angle i que fait cette courbe avec $R = \text{const.}$ aura pour tangente

$$\text{tang}\, i = \frac{\sqrt{E}\,dR}{\sqrt{G}\,dR'}.$$

On trouve sans difficulté

$$E = \frac{(c^2 - b^2)R'^2}{(R + R')^2(b^2 - R^2)},$$

$$G = \frac{(c^2 - b^2)R^2}{(R + R')^2(R'^2 - c^2)},$$

et par suite

$$ds^2 = \frac{c^2 - b^2}{(R + R')^2}\left(\frac{R'^2}{b^2 - R^2}\,dR^2 + \frac{R^2}{R'^2 - c^2}\,dR'^2\right).$$

Cela posé, en désignant par α et β les angles que font avec $R = \text{const.}$ les courbes

$$p\,dR + q\,dR' = 0,$$

et

$$\frac{dR}{pR^2(b^2 - R^2)} - \frac{dR'}{qR'^2(R'^2 - c^2)} = 0,$$

on trouve

$$\tang\alpha = -\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{q}{p},$$

$$\tang\beta = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{pR^2(b^2 - R^2)}{qR'^2(R'^2 - c^2)},$$

et par suite

$$\tang\alpha \tang\beta = -1;$$

donc, les deux familles de courbes sont orthogonales.

3° Enfin, pour trouver l'équation de la surface en coordonnées elliptiques, il suffit de rappeler que des équations des trois familles de surfaces homofocales du second ordre :

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

on déduit

$$x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2,$$
$$b^2c^2 + (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 = \mu^2\nu^2 + \nu^2\rho^2 + \rho^2\mu^2;$$

car l'équation de la cyclide, mise sous la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2)^2 - 4[b^2c^2 + (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2] = 0,$$

devient, à l'aide des relations précédentes,

$$(\rho^2 + \mu^2 + \nu^2)^2 - 4(\mu^2\nu^2 + \nu^2\rho^2 + \rho^2\mu^2) = 0.$$

Le premier membre de cette équation se décompose en quatre facteurs du premier degré; la surface a donc

quatre nappes

$$\begin{aligned}\rho + \mu + \nu &= 0,\\ \mu - \nu - \rho &= 0,\\ \nu - \rho - \mu &= 0,\\ \rho - \mu - \nu &= 0;\end{aligned}$$

la dernière équation représente à elle seule la partie réelle de la surface proposée; la première et la troisième donnent des surfaces imaginaires, et la seconde ne représente que les points A et B.

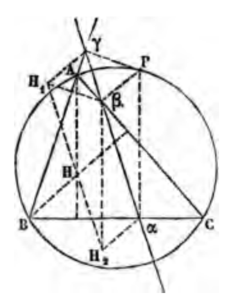
Question 708

(voir 2e série, t. III, p. 442);

PAR MM. LE BEL ET TALAYRACH,
Élèves du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser.)

On sait que si d'un point quelconque P *d'un cercle circonscrit à un triangle* ABC, *on mène des perpendiculaires aux trois côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires sont sur une même droite. Démontrer que cette droite est également distante du point* P *et du point de rencontre des trois hauteurs du triangle.*

Appelons α, β, γ les pieds des perpendiculaires



abaissées du point P sur les trois côtés du triangle ABC,

et considérons le quadrilatère complet $AB\alpha\beta C\gamma$. D'après une proposition connue (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 13, et t. VI, p. 196), les points de rencontre des hauteurs des triangles $A\beta\gamma$, $C\alpha\beta$, ABC, sont en ligne droite; soient H_1, H_2, H ces points, H se trouve donc sur H_1H_2. Mais la figure $P\beta\gamma H_1$ est un parallélogramme, de même que la figure $P\alpha\beta H_2$; donc la distance de P à la droite $\alpha\beta\gamma$ est la même que celle des points H_1, H_2 à cette droite, et par suite que celle de H. C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème démontre que dans tout triangle ABC circonscrit à une parabole, le point de rencontre des hauteurs du triangle est sur la directrice.

Car le point P peut être considéré comme le foyer d'une parabole inscrite dans le triangle ABC, laquelle aurait pour tangente au sommet la droite $\alpha\beta\gamma$; d'après ce qui précède, la droite H_1H_2 en serait la directrice.

Note. — MM. Legrand, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant); Rondeaux, du lycée Charlemagne, et Heurteau, de Sainte-Barbe, donnent une solution peu différente. MM. O. Puel, du Prytanée de la Flèche; Emperanger, du lycée de Bordeaux; A. Morel, du lycée Louis-le-Grand; Roques, du 53e d'infanterie, s'appuient sur la propriété de la parabole, démontrée comme corollaire dans la solution précédente. Autres solutions géométriques de MM. Marini, maître répétiteur au lycée Louis-le-Grand; A. Graber, de Zurich; A. D. et R., élèves de l'École Centrale; de Vigneral.

Question 710

(voir p. 442);

PAR M. L. LACAUCHIE,
Élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard.)

Soient a, b, c les milieux des côtés d'un triangle ABC;
a_1, b_1, c_1 *les pieds des hauteurs;*

α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 *les points d'intersection* (bc_1, cb_1), (ca_1, ac_1), (ab_1, ba_1), (bc, b_1c_1), (ac, a_1c_1), (ab, a_1b_1);

M le centre du cercle circonscrit;

H le point d'intersection des hauteurs;

O le centre du cercle des neuf points.

Cette notation admise :

1° *Les points* α, β, γ *sont sur la ligne droite* HM.

2° *Les droites* $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ *sont parallèles entre elles, et perpendiculaires à* HM.

3° *Les quatre points* α, β_1, γ_1, A *sont en ligne droite. Il en est de même des quatre points* β, γ_1, α_1, B, *et des quatre points* γ, α_1, β_1, C.

4° α_1, β_1, γ_1 *sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle des neuf points* (O).

5° *Les droites* $a\alpha_1$, $b\beta_1$, $c\gamma_1$ *passent par un même point* P; *et pareillement les droites* $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ *passent par un point* P_1.

6° *Les deux points* P *et* P_1 *appartiennent au cercle des neuf points.*

7° *Les points d'intersection* (AB, $\alpha_1\beta_1$), (BC, $\beta_1\gamma_1$), (AC, $\alpha_1\gamma_1$) *sont une même droite qui passe par* P, P_1.

(Schroeter.)

J'appelle a', b', c' les points milieux des distances HA, HB, HC par lesquels passe le cercle des neuf points. On sait que les droites aa', bb', cc' sont des diamètres de ce cercle.

1° Si je considère l'hexagone $bc_1c'cb_1b'b$ inscrit au cercle des neuf points, les points α, H, O, intersections des côtés opposés, sont en ligne droite. En considérant les hexagones $ac_1c'ca_1a'a$ et $ab_1b'ba_1a'a$, on démontrerait de même que les points β et γ sont sur la droite OH, qui n'est autre que MH.

2° Si nous considérons le quadrilatère inscrit cc_1b_1b, la polaire du point α où se coupent les diagonales est $A\alpha_1$; de même, les droites $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sont les polaires des

points β et γ. Les points α, β, γ étant sur une même ligne droite (MH) qui passe par le centre, les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ seront parallèles entre elles et perpendiculaires à la droite MH.

3° L'hexagone $b_1cabc_1a_1b_1$ étant inscrit au cercle, les points α, β_1, γ_1 sont en ligne droite. On démontrerait, en considérant les hexagones $a_1cbac_1b_1a_1$ et $ab_1c_1a_1bca$, qu'il en est de même pour les points β, α_1, γ_1 et les points γ, α_1, β_1.

Or, les polaires des points β, α_1, γ_1 sont les droites $A\beta_1$, $A\alpha$, $C\beta_1$, elles se coupent au même point, donc $A\alpha$ passe par β_1, et les points α, β_1, γ_1, A sont en ligne droite. On démontrerait de même que β, γ_1, α_1, B et γ, α_1, β_1, C sont respectivement en ligne droite.

4° La polaire $A\alpha$ du point α_1 passant par β_1, γ_1, celle de β_1 par α_1, γ_1, le triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est conjugué au cercle des neuf points (O).

5°-6° Si l'on joint B, β_1 on détermine sur le cercle (O) un point P tel, que la droite qui le joint au point a passe par α_1. On a, en effet, un quadrilatère inscrit acbP; cb coupe la polaire de β_1 en α_1; donc aP passera en α_1. De même ab coupe cette polaire en γ_1, donc CP passera par γ_1.

On démontrerait de la même façon que $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ se coupent en un même point P_1 situé sur le cercle des neuf points.

7° Soient A_1, B_1, C_1 les points d'intersection (AB, $\alpha_1\beta_1$), (BC, $\beta_1\gamma_1$), (AC, $\alpha_1\gamma_1$). Pa et P_1a_1 se coupent en α_1, donc aa_1, ou BC, et PP_1 se coupent en un point A_1 de la polaire de α_1, ou $\beta_1\gamma_1$. Donc A_1 est sur la droite PP_1. Il en est de même de B_1 et C_1.

On peut encore tirer d'autres conséquences de ces propriétés.

8° Soient α_2, β_2, γ_2 les points d'intersection des

droites (Pa, P_1a_1), (Pb, P_1b_1), (Pc, P_1c_1); et α_3, β_3, γ_3 les points d'intersection des droites $(B_1\beta_1, C_1\gamma_1)$, $(A_1\alpha_1, C_1\gamma_1)$, $(A_1\alpha_1, B_1\beta_1)$.

Les points A_1, B_1, C_1 ont pour polaires $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$; ces droites se coupent donc en un même point, qui est le pôle de PP_1.

9° α_2 est un point de la polaire de α_1, ce point est donc sur la droite $A\alpha\beta_1\gamma_1A_1$. Les points β_2, γ_2 sont de même respectivement sur les droites $B\beta\alpha_1\gamma_1B_1$ et $C\gamma\alpha_1\beta_1C_1$.

10° L'hexagone $cb_1Pc_1bP_1c$ étant inscrit au cercle des neuf points, les points α, β_2, γ_2 sont en ligne droite. Il en est de même de β, α_2, γ_2 et de γ, α_2, β_2.

11° Les polaires de α, β_2 et γ_2 étant les droites $A\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$, le point α_3 sera sur la droite $A\alpha_1$, et sera le pôle de la droite $\alpha\beta_2\gamma_2$. De même β_3 et γ_3 sont sur les droites $B\beta_1$ et $C\gamma_1$, et seront les pôles des droites $\beta\alpha_2\gamma_2$ et $\gamma\alpha_2\beta_2$.

12° En appelant α_4, β_4, γ_4 les points de rencontre des droites $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ deux à deux, on voit que le triangle $\alpha_4\beta_4\gamma_4$ est le triangle conjugué de ABC par rapport au cercle des neuf points. Les polaires de α_1, α_2, α_4 étant $\beta_1\gamma_1$, $A_1\alpha_1$, BC qui se coupent en A_1, ces points sont en ligne droite. Il en est de même de β_1, β_2, β_4 et de γ_1, γ_2, γ_4.

Donc, en résumé, on a : quatre droites contenant chacune six points : $(MOH\alpha\beta\gamma)$, $(A\alpha\beta_1\gamma_1A_1\alpha_2)$, $(B\beta\alpha_1\gamma_1B_1\beta_2)$, $(C\gamma\alpha_1\beta_1C_1\gamma_2)$; une droite en contenant cinq $(PP_1A_1B_1C_1)$; neuf droites contenant chacune trois points : $(\alpha\beta_2\gamma_2)$, $(\beta\alpha_2\gamma_2)$, $(\gamma\alpha_2\beta_2)$, $(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)$, $(\beta_1\beta_2\beta_4)$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_4)$, $(A\alpha_1\alpha_3)$, $(B\beta_1\beta_3)$, $(C\gamma_1\gamma_3)$: ces trois dernières droites sont de plus perpendiculaires à MH ;— trois groupes de trois droites passant par un même point : $(a\alpha_1)$, $(b\beta_1)$, $(c\gamma_1)$ par le point P; $(a_1\alpha_1)$, $(b_1\beta_1)$, $(c_1\gamma_1)$ par le point P_1; $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\beta_1\beta_2)$, $(\gamma_1\gamma_2)$ par le pôle de PP_1;

— enfin deux triangles : $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, conjugué de ABC par rapport au cercle (O), et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ conjugué de ce cercle.

Note. — Solutions analogues par le P. Autefage et par MM. Le Bel et Talayrach.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

IV.

Traité de Géométrie descriptive, par *Jules de la Gournerie*, Ingénieur en chef, etc. Troisième partie. xx-216 pages, et Atlas de 46 planches. Paris, 1864, chez Gauthier-Villars.

La troisième Partie du *Cours de Géométrie descriptive* se compose de trois Livres consacrés à la théorie de la *courbure des surfaces*, aux *surfaces hélicoïdales* et aux *surfaces topographiques*.

Pour exposer la théorie de la courbure des surfaces, M. de la Gournerie part du théorème de M. Bertrand sur la déviation de la normale. Il en déduit la formule d'Euler, l'indicatrice de M. Dupin et les surfaces osculatrices du second degré.

L'auteur discute ensuite la formule d'Euler dans les plus grands détails; il fait voir qu'en général une surface se divise en deux régions caractérisées par des indicatrices elliptiques ou hyperboliques séparées par une courbe dont les points ont pour indicatrices des paraboles.

Après avoir étudié les courbures des sections normales, on détermine celles des sections obliques à l'aide du théorème de Meusnier. Lorsque le plan sécant devient tangent, ce théorème donne pour le rayon de courbure une valeur indéterminée. Pour ce cas, M. de la Gournerie établit une formule nouvelle

fondée sur la relation

$$E = \varepsilon\delta,$$

dans laquelle E est l'angle de contingence de la section normale passant par l'une des asymptotes de l'indicatrice, ε l'angle de contingence de la branche de courbe située dans le plan tangent et tangente à la même asymptote de l'indicatrice, et δ la déviation de la normale à l'extrémité de l'axe considéré.

Comme exemple, M. de la Gournerie étudie les surfaces de révolution et les surfaces gauches. Dans les premières, les sections principales sont la courbe méridienne, et la section normale qui lui est perpendiculaire; les rayons de courbure principaux sont le rayon de courbure de la méridienne et la portion de la normale comprise entre le point considéré et l'axe de la surface.

Les surfaces gauches sont à courbures opposées, et la génératrice qui passe en un point est une des asymptotes de l'indicatrice en ce point. L'autre asymptote est la génératrice de l'hyperboloïde osculateur.

Deux surfaces gauches qui se raccordent le long d'une génératrice sont osculatrices en deux points de cette génératrice.

Le lieu des centres de courbure d'une surface gauche correspondant aux divers points d'une même génératrice est en général une courbe gauche du quatrième degré, qui est l'intersection du paraboloïde formé par les normales, et d'un hyperboloïde à une nappe.

Lorsque la génératrice considérée est singulière, le paraboloïde des normales devient un plan, et le lieu des centres de courbure est alors une courbe du second degré.

Comme application de cette théorie, M. de la Gournerie étudie la surface gauche formée par les normales à une même surface menées par les différents points d'une courbe tracée sur cette surface. Pour exposer plus simplement les résultats auxquels il est parvenu par l'analyse, M. de la Gournerie a recourt à la considération ingénieuse de la droite auxiliaire, due à M. Mannheim.

Si par le point central A d'une génératrice on élève sur cette droite une perpendiculaire AA', égale au paramètre de distribution, l'angle sous lequel on voit du point A' un segment BC de la génératrice est égal à l'angle que forment les plans tangents en B et C. Soit O un point quelconque de la génératrice, menons par le point A' une perpendiculaire PQ à A'O, et soient en outre B' et C' les points de PQ qui se projettent en B et C : l'angle B'OC' est égal à l'angle que font entre eux les plans tangents en B et C. D'après cela, quand on connaît les plans tangents en trois points O, B, C d'une même génératrice, il est facile de construire la droite auxiliaire PQ, relative au point O, d'où l'on déduit le point central et le paramètre de distribution.

Dans le second Chapitre, M. de la Gournerie fait voir comment on peut, à l'aide des théorèmes d'Euler et de Meusnier, déterminer le plan osculateur et le centre de courbure d'une courbe donnée par ses deux projections.

Lorsque deux surfaces sont tangentes en un point, en général elles se coupent suivant une courbe dont deux branches passent par ce point. Pour obtenir les tangentes à ces deux branches, il suffit de tracer les diamètres communs aux indicatrices des deux surfaces.

Dans le troisième Chapitre, M. de la Gournerie démontre le théorème de M. Dupin sur les tangentes conjuguées ; ensuite il étudie les courbes d'ombre des surfaces gauches dans différents cas particuliers, et arrive à des résultats nouveaux et intéressants.

Enfin, M. de la Gournerie discute avec le plus grand soin les parties réelles et les parties virtuelles des courbes d'ombre, et obtient ce théorème général :

Quand sur une surface la courbe d'ombre propre et la courbe d'ombre portée se rencontrent, leurs tangentes sont conjuguées.

Lorsqu'une surface est osculée par un plan, le théorème de M. Dupin ne donne plus la tangente à la courbe d'ombre qui

passe par ce point; cela tient à ce que, dans ce cas, la courbe d'ombre a deux tangentes; on détermine ces droites à l'aide du théorème suivant, dû à M. de la Gournerie :

Quand une surface est osculée par un plan en un point, si elle est éclairée par un point lumineux situé dans ce plan, le point d'osculation appartient deux fois à la courbe d'ombre, et les deux branches sont tangentes aux deux droites qui forment le diamètre de l'indicatrice du troisième ordre, par rapport à la direction du rayon de lumière.

Le quatrième Chapitre est consacré aux lignes de courbure. Pour déterminer celles des surfaces du second ordre, M. de la Gournerie démontre le théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales, et le théorème de Binet sur les surfaces homofocales du second degré. Il résulte de ces deux théorèmes que les lignes de courbure d'une surface du second degré sont les sections faites dans cette surface par les surfaces homofocales. Les projections de ces lignes sur les plans principaux de la surface considérée sont des courbes du second degré.

Sur une surface quelconque, on appelle *ligne asymptotique* celle qui touche en chacun de ses points une des asymptotes de l'indicatrice. Son plan osculateur est tangent à la surface. M. de la Gournerie étudie les lignes asymptotiques des surfaces gauches et des surfaces de révolution.

En général, le cercle osculateur d'une section normale à une surface n'a qu'un contact du second ordre avec cette section; mais pour certaines positions du plan sécant le contact s'élève au troisième ordre. On dit alors que ces sections sont surosculées par des cercles. En un point d'une surface quelconque il y a trois sections normales surosculées par des cercles. Pour une surface du second degré, ces sections sont les deux génératrices, et la courbe dont le plan est conjugué du diamètre qui passe par le milieu de la normale.

Sur une surface quelconque on peut concevoir une courbe qui soit en chacun de ses points tangente à une section normale surosculée par un cercle. Pour une surface du second

degré, une telle courbe est la ligne de contact de la surface avec une développable qui est circonscrite à la fois à cette surface et à une sphère concentrique. Ces courbes, que M. Poinsot a appelées *polhodies*, se projettent sur les plans principaux de la surface, considérée suivant des coniques semblables et semblablement placées.

Le second Livre, relatif aux surfaces hélicoïdes, est divisé en cinq Chapitres.

Dans le premier Chapitre, M. de la Gournerie définit d'une manière générale la surface hélicoïde comme le lieu des hélices de même axe et de même pas qui passent par les différents points d'une hélice donnée. Il complète cette définition en remarquant que cette surface peut être engendrée par la directrice tournant autour de l'axe d'un mouvement uniforme, et ayant en même temps un mouvement uniforme de translation parallèlement à cette droite. La courbe directrice est appelée méridienne lorsqu'elle est plane et que son plan passe par l'axe. Le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire de rotation, qui est un élément très-important de la surface, n'avait jusqu'à présent reçu aucune dénomination particulière; M. de la Gournerie le désigne sous le nom de *pas réduit*, expression heureusement choisie, car ce rapport n'est autre chose que le pas commun des hélices divisé par 2π.

Lorsque la directrice est une droite, en général la surface est gauche. L'hélice qui passe par le pied de la plus courte distance de l'axe à la génératrice est appelée hélice de gorge. Quand la génératrice coupe l'hélice de gorge, la surface est gauche, et quand la génératrice touche l'hélice de gorge, la surface est développable.

Désignons par b le rayon de l'hélice de gorge, par h son pas réduit, par β l'angle que sa tangente fait avec un plan perpendiculaire à l'axe, et par α l'angle que la génératrice fait avec le même plan. Ces quatre quantités définissent complétement la surface, mais elles ne sont pas indépendantes les unes des autres, car on a la relation

(1) $$h = b \tang \beta.$$

Sur un hélicoïde gauche la ligne de striction est l'hélice de gorge. Toutes les génératrices ont le même paramètre. La valeur de ce paramètre est

$$(2) \qquad k = b(\tang\alpha - \tang\beta).$$

Pour que deux hélicoïdes puissent s'appliquer l'un sur l'autre, il faut que le paramètre des génératrices soit le même, et que ces droites coupent l'hélice de gorge sous le même angle ε, ce qui donne la relation

$$(3) \qquad \alpha - \beta = \varepsilon.$$

k et ε étant donnés, tous les hélicoïdes dont les éléments satisfont aux trois équations (1), (2), (3) sont applicables les uns sur les autres. En éliminant α et β entre ces trois relations, on trouve

$$b^2 + h^2 - k\cot\varepsilon . b + kh = 0.$$

Si l'on regarde b et h comme les coordonnées rectangulaires d'un point variable, cette équation représente un cercle. Ce cercle, indiqué par M. Bour dans son *Mémoire sur la déformation des surfaces*, permet de déterminer immédiatement deux des trois quantités b, h et α, lorsque l'une d'elles est donnée.

Tous les hélicoïdes de même axe, correspondant à un même système de valeurs de h et de α, ont les mêmes plans tangents à l'infini. Celui qui a pour rayon $h\cot\alpha$ est développable, il est donc la développable asymptote de tous les autres.

Lorsque la génératrice se déplace en décrivant la surface, elle rencontre une infinité de fois sa position primitive; par chacun de ces points passe une hélice double. L'hélicoïde possède donc une infinité d'hélices doubles ayant des rayons de plus en plus grands.

Le second Chapitre renferme la théorie de l'hélicoïde développable.

Un hélicoïde développable, déterminé par son arête de rebroussement, a pour trace, sur un plan perpendiculaire à l'axe, une développante de cercle. Cette surface est d'égale pente, car

son cône directeur est de révolution. D'après cela, on résout facilement les divers problèmes relatifs aux plans tangents de l'hélicoïde développable.

Pour trouver les sections planes de cette surface, on peut construire les projections d'un certain nombre de génératrices, et déterminer les points d'intersection de ces droites avec le plan sécant. Mais il est préférable d'employer une méthode remarquable par son élégance et sa simplicité, due à M. Bour, et qui s'applique à toutes les surfaces dont les génératrices font un angle constant avec le même plan.

Soit AB la trace horizontale d'une surface réglée dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle constant α. Soient PQ la trace horizontale du plan sécant et θ l'inclinaison de ce plan. Soient CM la projection horizontale d'une génératrice de la surface, et CQ la perpendiculaire à cette droite, C étant la trace horizontale de la génératrice et M la projection horizontale du point où cette droite rencontre le plan sécant. Abaissons MD perpendiculaire sur PQ; si nous désignons par Z la hauteur du point d'intersection au-dessus du plan horizontal, nous aurons

$$Z = \text{MC} \tang\alpha = \text{MD} \tang\theta.$$

Dès lors la question revient à trouver sur la droite MC un point tel, que le rapport de ses distances aux droites données soit égal à un rapport donné. Pour cela il suffit de porter, à partir d'un point fixe O, deux longueurs OE et OF respectivement parallèles à CQ et PQ, dont le rapport $\frac{\text{OE}}{\text{OF}}$ soit égal à $\frac{\cot\theta}{\cot\alpha}$; la ligne EF est parallèle à MQ.

Si la surface considérée est développable, la droite CQ est la trace horizontale du plan tangent, et par suite la droite MQ est la projection horizontale de la tangente.

Pour faire le développement d'un hélicoïde développable, il suffit de remarquer que l'arête de rebroussement ayant un rayon de courbure constant, la transformée de cette courbe est un cercle.

Le sujet du troisième Chapitre est la surface de la vis à filets triangulaires, qui est un hélicoïde gauche dans lequel la directrice rectiligne rencontre l'axe obliquement. L'hélice de striction se réduit à l'axe, et le paramètre des génératrices est égal et de signe contraire au pas réduit. Le cône directeur est de révolution.

Pour déterminer une surface de vis à filets triangulaires, il suffit de se donner une hélice et l'angle α que la génératrice fait avec un plan perpendiculaire à l'axe.

La trace de la surface sur un plan perpendiculaire à l'axe est une spirale d'Archimède.

Pour construire le plan tangent en un point de la surface, il suffit de déterminer la tangente à l'hélice qui passe par ce point, et de mener un plan par cette droite et par la génératrice. De cette construction on déduit la suivante : par la trace horizontale de l'axe et du côté où s'étend la spirale d'Archimède, on élève une perpendiculaire à la projection de la génératrice, égale à $h \cot \alpha$; la droite qui joint l'extrémité de cette perpendiculaire à la projection du point donné est perpendiculaire à la trace horizontale du plan tangent cherché.

Pour construire la courbe d'ombre dans le cas de rayons parallèles, par chaque génératrice on fait passer un plan parallèle aux rayons lumineux, et on détermine le point de contact par la méthode précédente. M. Poncelet a simplifié cette construction en remarquant que la droite qui donne la projection horizontale du point de contact passe par un point fixe. M. de la Gournerie a modifié cette construction de manière à obtenir un tracé plus rapide et plus exact.

Dans le cas de rayons divergents, on fait passer des plans par le point lumineux et les diverses génératrices, et on détermine les points de contact.

Les tangentes et les asymptotes des courbes d'ombre se déterminent à l'aide du théorème des tangentes conjuguées, qui conduit, dans ce cas, à une construction facile, car l'une des asymptotes de l'indicatrice est la génératrice elle-même, et l'autre se déduit aisément de la proposition suivante :

Quelle que soit la génératrice que l'on considère, si on élève à sa projection horizontale une perpendiculaire égale à $2h$ cotα, *par le pied de l'axe et du côté où s'étend la branche de la spirale d'Archimède sur laquelle est sa trace, l'extrémité de cette droite appartient aux projections horizontales des secondes asymptotes des indicatrices des différents points de cette génératrice.*

Comme application de ces théories, M. de la Gournerie donne la construction des ombres d'une vis à filets triangulaires et de son écrou. Il termine ce Chapitre en faisant voir que dans certains cas la surface de la vis à filets triangulaires peut être employée comme surface de raccordement. Il donne comme exemple la surface gauche lieu des normales à un cône de révolution, menées par les divers points d'une section plane de cette surface.

Le quatrième Chapitre contient la théorie de la surface de la vis à filets carrés, c'est-à-dire de la surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une droite autour d'un axe qu'elle rencontre à angle droit. Cet hélicoïde est tout à la fois une variété de la surface de la vis à filets triangulaires et un conoïde droit. On peut y tracer des hélices, dites hélices excentriques, qui résultent de l'intersection de la surface par des cylindres de révolution dont une des génératrices coïncide avec l'axe de la surface.

Pour déterminer une surface de vis à filets carrés, il suffit de se donner l'axe et une hélice directrice. Le plan tangent en un point quelconque se détermine à l'aide d'un paraboloïde de raccordement. Les sections planes s'obtiennent en prenant les points de rencontre d'un certain nombre de génératrices avec le plan sécant. On construit les courbes d'ombre en faisant passer des plans lumineux par les génératrices et déterminant les points de contact. Dans le cas de rayons parallèles, la courbe d'ombre est une hélice excentrique.

La surface de la vis à filets carrés est la seule surface gauche dont les rayons de courbure soient, en chaque point, égaux et de signes contraires.

Le cinquième Chapitre est consacré aux surfaces hélicoïdes non réglées.

Une surface de ce genre est donnée par son axe, par son pas et par une directrice curviligne. On détermine l'intersection de la surface par un plan, en prenant les traces, sur ce plan, d'un nombre suffisant d'hélices. Les plans tangents et les lignes d'ombre se construisent à l'aide des surfaces de vis à filets triangulaires de raccordement, engendrées par les tangentes de la courbe méridienne.

Si l'on considère un axe fixe OZ, une courbe AB située dans un plan passant par cet axe, un point M de cette courbe, et les différentes surfaces hélicoïdales que peut engendrer la courbe AB en se mouvant autour de l'axe OZ, les asymptotes des indicatrices de ces surfaces correspondant au point M forment un cône du second degré. Ce cône, dont la considération est due à M. de la Gournerie, est symétrique par rapport au plan ZOM; l'une de ses génératrices est parallèle à l'axe, les asymptotes de l'indicatrice de la surface de révolution engendrée par AB sont deux autres génératrices de ce cône. Il est en outre facile de trouver un plan qui coupe ce cône suivant une ellipse dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe soit un cercle. Dès lors, on peut aisément trouver l'intersection de ce cône par un plan quelconque, ce qui permet de déterminer l'indicatrice d'une quelconque des surfaces hélicoïdales produites par le déplacement de AB autour de OZ.

Le dernier Livre, relatif aux surfaces topographiques, se compose de deux Chapitres.

Le premier contient les solutions des principaux problèmes relatifs à ces surfaces, résolus par la méthode des projections cotées.

Dans le second Chapitre, M. de la Gournerie fait voir comment un tableau graphique peut représenter une table numérique à double entrée. Dans certains cas, au lieu de construire la figure qui correspond à la formule donnée, on construit celle qui correspond à la formule obtenue en prenant des variables auxiliaires. Cette nouvelle figure est dite l'*anamorphose* de la première.

On voit par cette analyse que le nouvel ouvrage de M. de la Gournerie est un grand et beau travail, où l'on trouve les théories les plus nouvelles et les plus intéressantes. Aussi nous conseillons la lecture de ce traité, non-seulement aux personnes qui s'occupent spécialement de Géométrie descriptive, mais à tous ceux qui étudient la Géométrie de l'espace; ils y trouveront les découvertes les plus récentes exposées avec la plus grande clarté.

M. de la Gournerie a le plus grand soin de citer les géomètres qui se sont avant lui occupés du même sujet, et d'indiquer les sources où il a puisé. Aussi, nous nous sommes fait un devoir de signaler les parties de l'ouvrage qui sont le résultat des recherches personnelles de M. de la Gournerie. Si nous avons fait quelques omissions, elles sont tout à fait involontaires.

Enfin, un point très-important, et auquel M. de la Gournerie a donné toute son attention, ce sont les constructions graphiques; il a toujours choisi les plus simples et les plus exactes au point de vue de l'exécution, et les épures qui accompagnent le texte sont de véritables modèles de l'art du trait.

L. Gros.

V.

Mécanique rationnelle; par *P.-J.-E. Finck*, professeur, chevalier de la Légion d'honneur.

La première Partie comprend la *Cinématique pure;* la deuxième, la *Mécanique du point matériel;* la troisième, la *Mécanique des corps.*

Il sera rendu compte de cet ouvrage.

ANALOGIES DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE

(voir page 145);

PAR M. PAUL SERRET.

II.

4. On sait que l'équation générale des plans tangents de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

rapporté à ses axes de figure, est

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\mathrm{P}=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2};$$

P désignant la distance du centre de la surface au plan tangent considéré; et α, β, γ les cosinus des inclinaisons, sur les axes $2a$, $2b$, $2c$ de l'ellipsoïde, de la normale correspondante N. Traduisant en langage ordinaire la formule qui donne la valeur de P, on peut dire que *le carré de la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un quelconque de ses plans tangents est égal à la somme des carrés des produits obtenus en multipliant chacun des demi-axes* a, b, c *de l'ellipsoïde par le cosinus de l'angle formé par la direction de cet axe avec la normale correspondante* N :

$$\mathrm{P}^2=a^2\cos^2(\mathrm{N},a)+b^2\cos^2(\mathrm{N},b)+c^2\cos^2(\mathrm{N},c).$$

5. *Du lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à sept plans.* — Soient, relativement à un

système quelconque d'axes rectangulaires,

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7,$$

les sept plans donnés : chacune des fonctions P étant de la forme

$$P = Ax + By + Cz - p,$$

où A, B, C désignent les cosinus directeurs de la normale N menée de l'origine au plan P, et p la distance de l'origine à ce plan.

Soient, en outre, (x, y, z) le centre d'un ellipsoïde tangent aux sept plans donnés; a, b, c les longueurs de ses demi-axes; et

α, β, γ	les cosinus directeurs de l'axe	$2a$,
α', β', γ'	»	$2b$,
$\alpha'', \beta'', \gamma''$	»	$2c$.

D'après la remarque précédente, on aura cette double expression de la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un quelconque des sept plans tangents :

$$\begin{aligned} P^2 &= (Ax + By + Cz - p)^2 \\ &= a^2 \cos^2(N, a) + b^2 \cos^2(N, b) + c^2 \cos^2(N, c), \end{aligned}$$

ou, en développant les cosinus,

$$\begin{aligned} (Ax + By + Cz - p)^2 &= a^2(A\alpha + B\beta + C\gamma)^2 \\ + b^2(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')^2 &+ c^2(A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'')^2. \end{aligned}$$

De là, en appliquant cette équation à chacun des plans $P_1, P_2, \ldots, P_7$,

$$1^\circ \left\{ \begin{aligned} (A_1 x + B_1 y + C_1 z - p_1)^2 &= a^2(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 \\ + b^2(A_1\alpha' + B_1\beta' + C_1\gamma')^2 &+ c^2(A_1\alpha'' + B_1\beta'' + C_1\gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{aligned} (A_2 x + B_2 y + C_2 z - p_2)^2 &= a^2(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma)^2 \\ + b^2(A_2\alpha' + B_2\beta' + C_2\gamma')^2 &+ c^2(A_2\alpha'' + B_2\beta'' + C_2\gamma'')^2, \end{aligned} \right.$$

. . . .

$$7^\circ \left\{ \begin{aligned} (A_7 x + B_7 y + C_7 z - p_7)^2 &= a^2(A_7\alpha + B_7\beta + C_7\gamma)^2 \\ + b^2(A_7\alpha' + B_7\beta' + C_7\gamma')^2 &+ c^2(A_7\alpha'' + B_7\beta'' + C_7\gamma'')^2; \end{aligned} \right.$$

et la détermination du lieu des centres (x, y, z) serait ramenée à l'élimination des *douze* variables

$$a, b, c; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad \alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

entre les *sept* équations que l'on vient d'écrire et les *six* relations que l'on sait exister entre les neuf cosinus relatifs à trois directions rectangulaires. Mais il arrive ici que l'élimination peut s'effectuer indépendamment de ces six relations. Au point de vue analytique, cela résulte d'un mode particulier de symétrie que présentent les équations 1°, 2°, 3°,..., 7°; et d'après lequel, les quantités

$$\begin{array}{llll} a^2\alpha^2, & b^2\alpha'^2 & \text{et} & c^2\alpha''^2; \\ a^2\beta^2, & b^2\beta'^2 & \text{»} & c^2\beta''^2; \\ a^2\gamma^2, & b^2\gamma'^2 & \text{»} & c^2\gamma''^2; \\ a^2\alpha\beta, & b^2\alpha'\beta' & \text{et} & c^2\alpha''\beta''; \\ a^2\beta\gamma, & b^2\beta'\gamma' & \text{»} & c^2\beta''\gamma''; \\ a^2\alpha\gamma, & b^2\alpha'\gamma' & \text{»} & c^2\alpha''\gamma'' \end{array}$$

entrant de la même manière dans toute combinaison de ces équations, il suffira de rendre nuls les coefficients des termes en

$$a^2\alpha^2, \; a^2\beta^2, \; a^2\gamma^2; \quad a^2\alpha\beta, \; a^2\beta\gamma, \; a^2\alpha\gamma$$

dans l'équation résultant de cette combinaison, pour voir disparaître toutes les variables.

Égalons donc à zéro le coefficient de chacune de ces quantités dans l'équation qui résulterait de l'addition des équations 1, 2, 3,..., 7 multipliées respectivement par les nombres indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_7$; il vient

$$(\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \ldots + \lambda_7 A_7^2 = 0, \\ \lambda_1 B_1^2 + \lambda_2 B_2^2 + \ldots + \lambda_7 B_7^2 = 0, \\ \lambda_1 C_1^2 + \lambda_2 C_2^2 + \ldots + \lambda_7 C_7^2 = 0, \\ \lambda_1 A_1 B_1 + \lambda_2 A_2 B_2 + \ldots + \lambda_7 A_7 B_7 = 0, \\ \lambda_1 B_1 C_1 + \lambda_2 B_2 C_2 + \ldots + \lambda_7 B_7 C_7 = 0, \\ \lambda_1 A_1 C_1 + \lambda_2 A_2 C_2 + \ldots + \lambda_7 A_7 C_7 = 0. \end{array} \right.$$

Or si, multipliant les équations 1°, 2°, 3°, ..., 7° respectivement par les nombres actuellement déterminés λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_7$, on les ajoute membre à membre; le second membre de l'équation résultante, ordonné par rapport aux dix-huit quantités telles que $a^2\alpha^2$, $a^2\beta^2$, $a^2\gamma^2$; $a^2\alpha\beta$, $a^2\beta\gamma$, $a^2\alpha\gamma$, a tous ses coefficients nuls et est lui-même identiquement nul. L'élimination des douze variables se trouve donc effectuée, et le lieu des centres est représenté par l'équation

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z - p_1)^2 + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z - p_2)^2 + \ldots$$
$$+ \lambda_7(A_7x + B_7y + C_7z - p_7)^2 = 0,$$

ou

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0.$$

D'ailleurs, et en vertu des mêmes relations (λ), les carrés et les rectangles des coordonnées x, y, z disparaissent d'eux-mêmes du premier membre de cette équation qui s'abaisse au premier degré. Le lieu des centres est donc un plan, et l'on a ce théorème :

Le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes aux sept plans

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7$$

est le plan unique représenté par l'équation

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \ldots + \lambda_7 P_7^2 = 0, \\ \text{ou} \quad \sum_1^7 \lambda P^2 = 0, \end{cases}$$

rendue linéaire par un choix convenable des coefficients.

Remarque I. — On sait que le lieu des centres des ellipsoïdes inscrits à un octaèdre hexagonal est le plan mené par les points milieux des trois diagonales. Ce plan,

rapporté à sept quelconques des faces de l'octaèdre, peut donc être représenté, de huit manières différentes, par une équation de la forme

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0.$$

Remarque II. — Développant l'équation du plan général des centres, on trouve

$$x(\lambda_1 p_1 . A_1 + \lambda_2 p_2 . A_2 + \ldots + \lambda_7 p_7\ A_7) + y(\lambda_1 p_1 . B_1 + \ldots) + z(\lambda_1 p_1 . C_1 + \ldots) + H = 0;$$

de là, pour la normale menée de l'origine à ce plan,

$$\frac{x}{\lambda_1 p_1 . A_1 + \ldots + \lambda_7 p_7 . A_7} = \frac{y}{\lambda_1 p_1 . B_1 + \ldots + \lambda_7 p_7 . B_7} = \frac{z}{\lambda_1 p_1 . C_1 + \ldots + \lambda_7 p_7 . C_7}.$$

La normale au plan des centres coïncide donc avec la résultante d'un contour polygonal dont les côtés successifs seraient représentés en grandeur, direction et sens par les perpendiculaires $p_1, p_2, \ldots, p_7$, menées de l'origine à chacun des sept plans donnés, respectivement multipliées par les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$.

Il est remarquable que les changements apportés dans ce contour par le déplacement de l'origine laissent invariable la direction de sa résultante.

Remarque III. — L'équation

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0$$

subsiste toujours, quelle que soit l'obliquité des axes. Choisissant, par exemple, trois des sept plans tangents pour plans des x, y, z; le plan général des centres de-

meurera représenté par l'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \sum_1^4 \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)^2 = 0,$$

rendue linéaire en x, y, z par un choix convenable des coefficients.

Remarque IV. — Le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes aux huit plans

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7 = P_8$$

est évidemment une ligne. Cette ligne, d'ailleurs, est droite, puisqu'elle doit être contenue en particulier dans chacun des plans

$$0 = \sum_1^7 \lambda P^2, \quad 0 = \sum_2^8 \lambda P^2;$$

et il est aisé de voir que l'équation

$$\sum_1^8 \lambda P^2 = 0,$$

rendue linéaire à l'aide des coefficients, représente tous les plans menés, en nombre infini, par la droite générale des centres; ou la série des plans diamétraux communs à toutes les surfaces considérées.

Remarque V. — L'équation

$$\sum_1^9 \lambda P^2 = 0$$

représenterait de même tous les plans menés par le centre unique de la surface du second ordre définie par les neuf plans tangents

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_8 = P_9,$$

ou le système des plans diamétraux de cette surface.

Remarque VI. — Il resterait maintenant à déduire de l'équation principale

$$(1)\qquad \sum_1^7 \lambda P^2 = 0,$$

convenablement interprétée, la construction même du plan général des centres.

Que si, essayant, comme le veut l'analogie, les considérations utilisées déjà dans la question analogue de Géométrie plane, on forme l'équation du plan polaire d'un point quelconque ($\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_7$), par rapport au plan des centres assimilé à une surface du second ordre par l'adjonction du *plan à l'infini* : on trouvera toujours ce plan polaire représenté par l'équation

$$\lambda_1 \varpi_1 . P_1 + \lambda_2 \varpi_2 . P_2 + \ldots + \lambda_7 \varpi_7 . P_7 = 0;$$

et l'on reconnaîtra encore que les rayons vecteurs menés du pôle à ce plan sont divisés en deux parties égales par le plan général des centres. Mais si, plaçant le pôle en l'un des sommets du solide formé par les sept plans, on pose, par exemple,

$$0 = \varpi_5 = \varpi_6 = \varpi_7;$$

l'équation du plan polaire correspondant

$$(2)\qquad \lambda_1 \varpi_1 . P_1 + \lambda_2 \varpi_2 . P_2 + \lambda_3 \varpi_3 . P_3 + \lambda_4 \varpi_4 . P_4 = 0$$

n'admet plus aucune solution connue. Quoique toujours parallèle au plan des centres, le plan polaire ne nous laisse apercevoir aucun de ses points ; et ne nous montre plus, dans le milieu de la droite qui réunirait ce point au pôle, un point du plan que nous cherchons.

L'analogie paraît donc interrompue ; et bien que l'on puisse y suppléer, comme nous le verrons, et définir géométriquement le plan des centres ; une autre définition

serait à désirer, uniquement fondée sur l'équation (1) et le parallélisme de tous les plans polaires. Il est vraisemblable que le plan serait la seule surface à employer dans la construction qui en résulterait; tandis que la sphère intervient seule dans celle que nous allons exposer.

6. *Du lieu des centres des surfaces du second ordre, tangentes à six plans, et dont les carrés des axes conservent une somme constante.* — Les six plans donnés étant

$$o = P_1 = P_2 = \ldots = P_6,$$

et toutes les notations du numéro précédent étant conservées, on aura à associer la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2 = \text{const.}$$

aux six premières des équations 1°, 2°, 3°,..., 7° du n° 5; ou à éliminer les *douze* variables entre les *sept* équations

$$1° \begin{cases} (A_1 x + B_1 y + C_1 z - p_1)^2 = a^2 (A_1 \alpha + B_1 \beta + C_1 \gamma)^2 \\ + b^2 (A_1 \alpha' + B_1 \beta' + C_1 \gamma')^2 + c^2 (A_1 \alpha'' + B_1 \beta'' + C_1 \gamma'')^2, \end{cases}$$

$$2° \begin{cases} (A_2 x + B_2 y + C_2 z - p_2)^2 = a^2 (A_2 \alpha + B_2 \beta + C_2 \gamma)^2 \\ + b^2 (A_2 \alpha' + B_2 \beta' + C_2 \gamma')^2 + c^2 (A_2 \alpha'' + B_2 \beta'' + C_2 \gamma'')^2, \end{cases}$$

. . . .

$$6° \begin{cases} (A_6 x + B_6 y + C_6 z - p_6)^2 = a^2 (A_6 \alpha + B_6 \beta + C_6 \gamma)^2 \\ + b^2 (A_6 \alpha' + B_6 \beta' + C_6 \gamma')^2 + c^2 (A_6 \alpha'' + B_6 \beta'' + C_6 \gamma'')^2, \end{cases}$$

$$7° \qquad a^2 + b^2 + c^2 = k^2 = \text{const.};$$

et les *six* relations existant entre les neuf cosinus. Or, l'élimination peut encore s'effectuer indépendamment des trois relations qui résultent de l'orthogonalité des axes $2a$, $2b$, $2c$ de l'ellipsoïde.

Soient, en effet, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ six coefficients définis

par les conditions suivantes :

$$(\lambda)\quad\left\{\begin{array}{l}
\lambda_1 A_1^2 + \lambda_2 A_2^2 + \ldots + \lambda_6 A_6^2 = 1,\\
\lambda_1 B_1^2 + \lambda_2 B_2^2 + \ldots + \lambda_6 B_6^2 = 1,\\
\lambda_1 C_1^2 + \lambda_2 C_2^2 + \ldots + \lambda_6 C_6^2 = 1;\\
\lambda_1 A_1 B_1 + \lambda_2 A_2 B_2 + \ldots + \lambda_6 A_6 B_6 = 0,\\
\lambda_1 B_1 C_1 + \lambda_2 B_2 C_2 + \ldots + \lambda_6 B_6 C_6 = 0,\\
\lambda_1 A_1 C_1 + \lambda_2 A_2 C_2 + \ldots + \lambda_6 A_6 C_6 = 0.
\end{array}\right.$$

Les équations 1°, 2°, ..., 6° étant respectivement multipliées par les nombres λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_6$ ainsi déterminés, et ajoutées membre à membre, les neuf termes, tels que $a^2\alpha\beta$, $a^2\beta\gamma$, $a^2\alpha\gamma$, disparaissent d'eux-mêmes du second membre de l'équation résultante, les termes en $a^2\alpha^2$, $a^2\beta^2$, $a^2\gamma^2$, ayant des coefficients égaux à l'unité, se réduisent à $a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = a^2$; les termes en $b^2\alpha'^2$, $b^2\beta'^2$, $b^2\gamma'^2$ se réduisent à b^2; les termes en $c^2\alpha''^2$, $c^2\beta''^2$, $c^2\gamma''^2$ à c^2; et l'ensemble de ces termes se réduit à $a^2+b^2+c^2$ ou k^2, en vertu de la relation 7°. Toutes les variables ont donc disparu; et l'on a, pour le lieu cherché,

$$(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{array}{l}
\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z - p_1)^2 + \lambda_2(A_2x + \ldots)^2 + \ldots\\
\quad + \lambda_6(A_6x + B_6y + C_6z - p_6)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.},\\
\qquad\text{ou}\quad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}
\end{array}\right.$$

D'ailleurs, les rectangles des coordonnées disparaissent d'eux-mêmes du premier membre de cette équation, en vertu des relations (λ); les coefficients de x^2, y^2, z^2 y sont égaux à l'unité; le lieu des centres est une sphère dont le centre est indépendant de la valeur assignée à la constante $a^2+b^2+c^2$ (MENTION); et l'on a ce théorème :

Le lieu des centres des surfaces du second ordre,

tangentes aux six plans

$$o = P_1 = P_2 = \ldots = P_6,$$

et dont les carrés des axes conservent une somme constante, est la sphère représentée par l'équation

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z - p_1)^2 + \ldots \\ + \lambda_6 (A_6 x + B_6 y + C_6 z - p_6)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}, \\ \text{ou} \quad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}, \end{array} \right.$$

ramenée à la forme $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = o$, par un choix convenable des coefficients.

Remarque I. — On trouve aisément, pour les coordonnées du centre,

$$x = \lambda_1 p_1 . A_1 + \ldots + \lambda_6 p_9 . A_6,$$
$$y = \lambda_1 p_1 . B_1 + \ldots + \lambda_6 p_6 . B_6,$$
$$z = \lambda_1 p_1 . C_1 + \ldots + \lambda_6 p_6 . C_6;$$

et l'on voit que le centre de la sphère des centres coïncide avec l'extrémité d'un contour polygonal dont le point de départ serait à l'origine, et dont les côtés successifs seraient représentés en grandeur, direction et sens, par les perpendiculaires p_1, $p_2, \ldots, p_6$ menées de l'origine aux six plans donnés, respectivement multipliées par les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$: les changements apportés dans ce contour, par le déplacement de l'origine, laissant son extrémité immobile au même point.

Remarque II. — L'équation (II) subsisterait toujours, quelle que fût l'obliquité des axes. On pourrait, par exemple, choisir pour plans des x, y, z trois des six plans tangents donnés; et la sphère des centres serait encore

représentée par l'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \sum_1^3 \lambda \left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} - 1\right)^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.},$$

ramenée toujours à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos(xy) + \ldots = 0,$$

par un choix convenable des coefficients.

Remarque III. — Il serait aisé de déduire, du théorème actuel, le lieu des centres des surfaces du second ordre tangentes à sept plans.

Soit, en effet, $a^2 + b^2 + c^2$ la somme des carrés des axes de l'un quelconque des ellipsoïdes tangents aux sept plans $0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7$. Le centre de cet ellipsoïde devant appartenir, en particulier, à chacune des sphères

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

et

$$\sum_2^7 \mu P^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

appartiendra également au plan radical de ces sphères, représenté par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 - \sum_2^7 \mu P^2 = 0,$$

ou au plan unique et déterminé

$$\sum_1^7 \lambda' P^2 = 0,$$

ce qui est le théorème du numéro précédent.

Remarque IV. — Toutes les sphères représentées, en

nombre infini, par l'une des équations

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0,$$

$$\sum_1^8 \lambda P^2 = 0,$$

$$\sum_1^9 \lambda P^2 = 0$$

ont le même *plan*, le même *axe* ou le même *centre radical*, à savoir : le plan ou la droite des centres des ellipsoïdes tangents aux plans donnés, ou le centre unique de l'ellipsoïde tangent aux neuf plans

$$0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_9.$$

Remarque V. — Revenons à la sphère principale

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.}$$

et cherchons à en déterminer le centre.

Remarquons, à cet effet, toutes les sphères répondant aux diverses valeurs de la constante étant concentriques, que l'on peut supposer cette constante nulle. Le lieu considéré devient alors le lieu spécial des centres des hyperboloïdes *équilatères*,

$$a^2 \pm b^2 - c^2 = 0,$$

à une ou à deux nappes, tangents aux six plans donnés; et la sphère particulière, dont on doit déterminer le centre, est représentée par l'équation *homogène*

$$\text{(III)} \qquad \sum_1^6 \lambda P^2 = 0.$$

Or, le plan polaire, relatif à la sphère (III), d'un point

quelconque $(\varpi_1, \varpi_2, \ldots \varpi_6)$, a pour équation

$$\lambda_1\varpi_1 . P_1 + \lambda_2\varpi_2 . P_2 + \ldots + \lambda_6\varpi_6 . P_6 = 0;$$

et si, au lieu de laisser ce point quelconque, on le place en l'un des sommets du polyèdre formé par les six plans donnés, en posant, par exemple,

$$(\varpi) \qquad 0 = \varpi_4 = \varpi_5 = \varpi_6,$$

on a, pour le plan polaire correspondant

$$(\Pi) \qquad \lambda_1\varpi_1 . P_1 + \lambda_2\varpi_2 . P_2 + \lambda_3\varpi_3 . P_3 = 0:$$

équation d'un plan passant par le *sommet opposé* du polyèdre.

Deux sommets opposés quelconques du polyèdre formé par les six plans donnés *sont* donc *polairement conjugués par rapport à la sphère* particulière (III).

D'un autre côté, *deux points étant polairement conjugués par rapport à une sphère, et la droite qui réunit ces points étant prise pour diamètre d'une seconde sphère* : on sait que *ces deux sphères sont orthogonales.*

La sphère des centres (III) et *la sphère décrite sur l'une quelconque des diagonales du polyèdre* des six plans, *prise pour diamètre, sont donc orthogonales.* La détermination que l'on avait en vue se trouve réalisée, et l'on a cette suite de théorèmes :

1° Un système de *six* plans, situés d'une manière quelconque dans l'espace, donne lieu à dix diagonales réunissant le point de concours de trois de ces plans au point de concours des trois autres ; et à dix sphères décrites sur chacune de ces diagonales comme diamètre : ces dix sphères ont le même centre radical et la même sphère orthogonale. Nous nommerons celle-ci la *sphère conjuguée* des six plans.

2° Le lieu des centres des hyperboloïdes équilatères

($a^2 \pm b^2 - c^2 = o$), à une ou à deux nappes, tangents à six plans, est la sphère conjuguée des six plans, représentée par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = o.$$

3° *Sept* plans étant donnés, les sept sphères conjuguées de six de ces plans se coupent dans un même cercle, le *cercle conjugué* des sept plans; ce cercle est le lieu géométrique des centres des hyperboloïdes équilatères, tangents aux sept plans donnés; et son plan, qui coïncide avec le plan général des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à ces sept plans, est représenté par l'équation

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = o.$$

4° *Huit* plans étant donnés, les huit cercles conjugués de sept de ces plans se coupent dans les deux mêmes points; ces points sont les centres des deux hyperboloïdes équilatères tangents aux huit plans donnés; et la droite qui les réunit, ou l'*axe conjugué* des huit plans, coïncide avec la droite générale des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à ces huit plans. Cette droite n'est autre, d'ailleurs, que la commune intersection de tous les plans contenus, en nombre infini, dans l'équation

$$\sum_1^8 \lambda P^2 = o.$$

5° *Neuf* plans étant donnés, les neuf axes conjugués de huit de ces plans se coupent dans un même point : le centre de la surface du second ordre tangente aux neuf plans, et le point de commune intersection de tous les plans contenus dans l'équation

$$\sum_1^9 \lambda P^2 = o.$$

7. Parmi les conséquences géométriques du théorème précédent, on peut citer celles-ci :

Si quatre des diagonales d'un système de *six* plans ont leurs points milieux dans le même plan : les points milieux des dix diagonales sont dans un même plan représenté par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = 0.$$

Si quatre des plans-hauteurs menés, par l'un des *sommets* d'un système de *cinq* plans, perpendiculairement à l'*arête opposée*, se coupent en un même point : les dix plans analogues se coupent au même point.

On doit noter encore cette traduction géométrique de l'équation (II)

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = a^2 + b^2 + c^2 :$$

Six plans tangents et le centre d'une surface du second ordre étant donnés, la puissance de ce centre, par rapport à la sphère conjuguée des six plans, mesure la somme des carrés des axes principaux de la surface.

III.

8. La méthode que l'on vient de développer n'est pas limitée à la détermination du lieu des centres des courbes ou des surfaces du second ordre assujetties à certaines conditions. Le principe sur lequel elle est fondée interviendrait encore utilement dans la recherche, par exemple, du lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère; en conduisant, pour l'équation du lieu, à une forme abrégée remarquable et qui se prêterait, bien mieux que l'équation ordinaire, à sa construction définitive. Mais, laissant de côté ces applications, d'ailleurs très-secondaires, de notre méthode, nous indiquerons en-

core quelques formules simples qui en résultent immédiatement.

9. Trois tangentes et le centre d'une conique étant donnés, l'équation aux axes principaux de la courbe est

$$(1) \qquad a\sqrt{A^2-\alpha^2}+b\sqrt{A^2-\beta^2}+c\sqrt{A^2-\gamma^2}=0:$$

a, b, c désignant les trois côtés du triangle des trois tangentes; α, β, γ les distances du centre à ces côtés; et A l'un quelconque des demi-axes de la courbe.

10. Trois points et le centre d'une conique étant donnés, l'équation aux axes principaux est

$$(2) \quad a\alpha\sqrt{A^2-\alpha'^2}+b\beta\sqrt{A^2-\beta'^2}+c\gamma\sqrt{A^2-\gamma'^2}=0:$$

a, b, c et α, β, γ désignant encore les côtés du triangle des trois points, et les distances du centre à ces côtés; tandis que α', β', γ' désignent les distances du centre aux sommets du triangle, ou aux points donnés.

11. Étant donnés quatre plans tangents et le centre d'un ellipsoïde de révolution; l'axe double 2A, ou le diamètre du cercle principal de la surface, est défini par l'équation

$$(I) \qquad \sum_1^4 \sin(234).\sqrt{A^2-P_1^2}=0:$$

P_1, P_2, P_3, P_4 désignant les distances du centre aux plans donnés, et sin (234) le sinus de l'*angle solide* formé par les normales de trois de ces plans.

12. Étant donnés quatre points et le centre d'un ellipsoïde de révolution; l'axe double 2A de la surface est défini par l'équation

$$(II) \qquad \sum_1^4 \sin(\rho_2\rho_3\rho_4).\frac{\sqrt{A^2-\rho_1^2}}{\rho_1}=0:$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ désignant les demi-diamètres menés du centre aux quatre points donnés, et sin $(\rho_2\rho_3\rho_4)$ le sinus de l'angle solide formé de trois de ces demi-diamètres.

(*La suite prochainement.*)

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS RÉSOLUES PAR MOIVRE ET LEURS DÉRIVÉES;

PAR M. S. REALIS.

1. Soit l'équation

$$(1) \qquad y^{2n} + qy^n + p^n = 0,$$

dont les $2n$ racines sont comprises dans l'expression

$$y = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

où l'on doit donner à α, successivement, les n valeurs qui vérifient l'équation binôme

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

On supposera constamment, dans ce qui va suivre, que le nombre désigné par p est positif. Dans cette hypothèse, l'équation (1) demeure la même lorsqu'on y change y en $\frac{p}{y}$; d'où il suit qu'elle admet n diviseurs du second degré exprimés par la formule

$$y^2 - xy + p,$$

dans laquelle on attribuera à x les n valeurs de la fonction $y + \frac{p}{y}$.

D'après cela, divisons l'équation par y^n, ce qui la met

sous la forme

$$y^n + q + \frac{p^n}{y^n} = 0,$$

et faisons

$$y + \frac{p}{y} = x.$$

On aura

$$y^n + \frac{p^n}{y^n} = x^n - npx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} p^2 x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3} p^3 x^{n-6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4} p^4 x^{n-8} - \ldots \mp 2p^{\frac{n}{2}},$$

ou bien

$$y^n + \frac{p^n}{y^n} = x^n - npx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} p^2 x^{n-4} - \ldots \mp np^{\frac{n-1}{2}} x,$$

selon que n sera un nombre pair ou impair. Pour abréger, on représentera par $P_{2h} p^h x^{n-2h}$ un terme intermédiaire quelconque du développement qu'on vient d'écrire, laissant toutefois en évidence le deuxième terme où $P_2 = -n$. La loi de formation des coefficients P est connue, et je ne m'y arrêterai pas (*voir* l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, 2e édit., p. 194 et 441).

Au moyen de ce développement, l'équation (1) divisée par y sera transformée dans la suivante :

$$(2) \quad x^n - npx^{n-2} + P_4 p^2 x^{n-4} + \ldots + P_{2h} p^h x^{n-2h} + \ldots + q = 0;$$

et les n racines de celle-ci seront comprises, d'après la relation entre x et y, dans l'expression

$$x = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \frac{p}{\alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}}},$$

ou bien dans l'expression équivalente

$$x = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \alpha^{n-1} \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

α étant racine de l'équation

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Les équations de la forme (2), dont la résolution est réduite par ce qui précède au dernier degré de simplicité, rentrent dans celles que Moivre avait résolues dans les *Transactions philosophiques* pour l'année 1707. Ces équations ont été ensuite traitées par Euler, qui a vérifié *à posteriori* les solutions que Moivre avait données sans démonstration, et les a complétées par l'introduction des racines de l'unité (*voir* le tome VI des anciens Commentaires de Pétersbourg : *De formis radicum æquationum*; ou bien le *Complément des Éléments d'Algèbre* de Lacroix, 6e édit., p. 147).

On reconnaît aisément, d'après les formules ci-dessus, que selon que l'on aura

$$\frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{q^2}{4} - p^n > 0,$$

l'équation (2) aura toutes ses racines réelles, ou toutes imaginaires (à l'exception de celle qui correspond à $\alpha = 1$, quand n est impair, et de celles qui correspondent à $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$, quand n est pair et q négatif).

Dans le cas spécial de

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

l'équation a toutes ses racines réelles et égales deux à deux (avec une distincte, quand n est impair; et deux ne différant que par le signe, quand n est pair et q négatif).

Ce cas mérite une attention particulière, à cause des circonstances qu'il présente, et des conséquences qu'on en déduit relativement aux racines de l'équation et à celles de sa dérivée. C'est ce que je me propose de développer.

Remarque. — L'équation

$$y^6 + qy^3 + p^3 = 0,$$

traitée comme il vient d'être dit, conduit sur-le-champ à la résolution et à la discussion complète de l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - 3px + q = 0,$$

au moyen de la formule

$$x = \alpha \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}} + \alpha^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}},$$

où α doit recevoir, successivement, les trois valeurs de la racine cubique de l'unité.

Dans le cas particulier où $\frac{q^2}{4} - p^3 = 0$, les trois valeurs de x sont

$$x_1 = (\alpha + \alpha^2) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = x_2,$$

$$x_3 = 2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

ou bien, mettant le signe négatif hors du radical, et faisant attention que les racines cubiques imaginaires α et α^2 donnent $\alpha + \alpha^2 = -1$,

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = x_2; \quad x_3 = -2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

On a en effet

$$x^3 - 3x \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}} + q = \left(x + 2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)\left(x - \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^3 - 3px + 2p\sqrt{p} = (x + 2\sqrt{p})(x - \sqrt{p})^2,$$

le radical $\sqrt{p}$ devant être pris avec le signe de q.

2. Rappelons ici que si n est un nombre premier et que α soit une racine imaginaire quelconque de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$, les n racines de cette équation sont représentées par

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n,$$

et que si n est un nombre composé, il existe telle racine α (et même plusieurs racines) qui jouit également de la propriété de reproduire toutes les autres par ses diverses puissances successives. Les racines ayant cette propriété sont désignées sous le nom de *racines primitives* ou *racines absolues* de l'équation binôme $\alpha^n - 1 = 0$. On peut voir, pour ce qui les concerne, la Note XIII de l'ouvrage de Lagrange sur les équations numériques, ou la XIII[e] leçon de l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

Maintenant, reprenons l'équation (2), et considérons séparément les cas du degré impair et du degré pair.

Soit d'abord n impair, et posons

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + P_{2k}p^k x^{n-2k} + \ldots \mp np^{\frac{n-1}{2}} x + q.$$

Prenant pour α une racine absolue quelconque de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$, les n racines de $f(x) = 0$ seront fournies par la formule

$$(3) \quad x_k = \alpha^k \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \alpha^{n-k} \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

où l'on donnera à k les valeurs successives 1, 2, 3, ..., n.

Le cas qu'il importe d'examiner est celui où $\frac{q^2}{4} - p^n = 0$. Alors les valeurs de x se partagent par groupes de racines doubles, au nombre de $\frac{n-1}{2}$, de la manière suivante :

$$x_1 = (\alpha + \alpha^{n-1})\sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{n-1},$$

$$x_2 = (\alpha^2 + \alpha^{n-2})\sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{\frac{n-1}{2}} = \left(\alpha^{\frac{n-1}{2}} + \alpha^{\frac{n+1}{2}}\right)\sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{\frac{n+1}{2}},$$

tandis que la racine isolée, c'est-à-dire celle qui répond à la valeur réelle $\alpha^n = 1$, sera

$$x_n = 2\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}.$$

Et comme les couples $\alpha, \alpha^{n-1}; \alpha^2, \alpha^{n-2}; \ldots; \alpha^{\frac{n-1}{2}}, \alpha^{\frac{n+1}{2}}$ se composent tous d'expressions imaginaires conjuguées et réciproques deux à deux et donnant des sommes réelles, les couples des valeurs égales de x seront réels, comme on l'a annoncé plus haut.

On aura donc

$$f(x) = \left(x - 2\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)\left(x - \beta_1\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)^2$$
$$\times\left(x - \beta_2\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)^2 \cdots \left(x - \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt[n]{-\frac{q}{2}}\right)^2,$$
$$= (x + 2\sqrt{p})(x + \beta_1\sqrt{p})^2(x + \beta_2\sqrt{p})^2 \ldots$$
$$\times\left(x + \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}\right)^2,$$

en ayant soin de prendre $\sqrt{p}$ avec le signe de q; β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_{\frac{n-1}{2}}$ désignent les $\frac{n-1}{2}$ valeurs (toutes réelles) que prend la fonction

$$\beta_k = \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k},$$

en y faisant successivement $k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, après y avoir mis pour α une racine absolue quelconque de l'équation

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Ces valeurs de β se déduisent l'une de l'autre au moyen des relations connues

$$\beta_2 = \beta_1^2 - 2,$$
$$\beta_3 = \beta_1^3 - 3\beta_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\beta_k = \beta_1^k - k\beta_1^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2}\beta_1^{k-4} - \ldots,$$

et ne sont autre chose que les différentes racines de l'équation qu'on obtient en posant

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta$$

dans l'équation

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0,$$

d'après la méthode ordinaire d'abaissement des équations réciproques. On peut voir, relativement à la formation à l'équation en β, l'*Algèbre supérieure* déjà citée, p. 186 et 197.

Cela posé, considérons la dérivée de $f(x)$, et rappe-

lons-nous que l'équation

$$f'(x) = 0$$

doit avoir les racines x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_{\frac{n-1}{2}}$ en commun avec $f(x) = 0$. Nous aurons

$$f'(x) = n(x + \beta_1\sqrt{p})(x + \beta_2\sqrt{p})\ldots\left(x + \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}\right)X,$$

X désignant un polynôme du degré $\frac{n-1}{2}$ qu'il s'agit de déterminer.

Cette dérivée, dont le degré est $n - 1$, ne contiendra pas de terme de degré impair par rapport à x, en sorte que ses racines seront égales deux à deux et de signes contraires. C'est-à-dire que si l'on désigne par a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{n-1}$ les racines (toutes réelles) de $f'(x) = 0$ rangées par ordre de grandeur algébrique croissante, on aura

$$a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \ldots = a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n+1}{2}} = 0.$$

Substituons ces quantités à la place de x dans $f(x)$, et supposons d'abord que q soit positif; nous aurons, à cause des racines communes entre $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$,

$$f(a_2) = f(a_4) = f(a_6) = \ldots = f(a_{n-1}) = 0.$$

Si q était négatif, ce qui ne changerait rien à la dérivée, on aurait

$$f(a_1) = f(a_3) = f(a_5) = \ldots = f(a_{n-2}) = 0.$$

Or, il est clair que si q est positif, on passe au cas de q négatif en retranchant de $f(x)$ la quantité $2q$, et si q est

négatif, on passe au cas de q positif en ajoutant le double de la valeur absolue de q à $f(x)$; d'où il suit que, pour $q > 0$, on aura simultanément

$$\left\{\begin{array}{r} f(a_{2k+1}) = 2q, \\ f(a_{2k}) = 0, \end{array}\right.$$

et, pour $q < 0$, on aura

$$\left\{\begin{array}{r} f(a_{2k+1}) = 0, \\ f(a_{2k}) = 2q. \end{array}\right.$$

Dans ces formules, a_{2k+1} désigne une quelconque des racines de rang impair $a_1, a_3, \ldots, a_{n-2}$, et a_{2k} une quelconque des racines de rang pair $a_2, a_4, \ldots, a_{n-1}$. On peut mettre, au lieu de q, sa valeur $2\sqrt{p^n}$, ou $2p^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}$, en prenant le radical avec le signe de q.

Ce qui précède donne le moyen d'évaluer les racines de l'équation $X = 0$, c'est-à-dire les racines de $f'(x) = 0$ qui n'annulent pas $f(x)$. Elles ne sont autres, en effet, que les racines communes à $f(x) = 0$ et à $f'(x) = 0$, prises en signes contraires. Cela résulte, soit de ce que l'on a $a_k + a_{n-k} = 0$, comme on a vu plus haut, soit de ce que l'on doit avoir $f(a) = 2q$, a étant racine de $X = 0$; ce qui revient à changer le signe de q dans $f(x) = 0$ après avoir écrit a au lieu de x, et par conséquent à prendre les racines ci-dessus de $\frac{f'(x)}{X} = 0$ avec des signes contraires.

Il vient donc

$$X = (x - \beta_1\sqrt{p})(x - \beta_2\sqrt{p})\ldots\left(x - \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}\right),$$

et par conséquent

$$f'(x) = n(x^2 - \beta_1^2 p)(x^2 - \beta_2^2 p)\ldots\left(x^2 - \beta_{\frac{n-1}{2}}^2 p\right).$$

On a ainsi, dans le cas de

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

une méthode générale d'abaissement et de décomposition des équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0,$$

au moyen de l'équation en β qui donne les sommes des racines réciproques de l'équation binôme du degré n.

3. Cette décomposition n'a plus lieu pour l'équation

$$f(x) = 0$$

quand on a

$$\frac{q^2}{4} - p^n \gtrless 0,$$

mais elle a toujours lieu pour la dérivée, car celle-ci demeure invariable quelle que soit la valeur de q. Mais dans tous les cas (n étant impair) on a, entre $f(x)$ et les racines de la dérivée, les relations très-remarquables qui suivent :

1°
$$\frac{q^2}{4} - p^n > 0, \quad q = +2\sqrt{p^n} + r^2,$$
$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = +4\sqrt{p^n} + r^2, \\ f(a_{2k}) = +r^2; \end{cases}$$

2°
$$\frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad q = +2\sqrt{p^n} - r^2 > 0,$$
$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = +4\sqrt{p^n} - r^2, \\ f(a_{2k}) = -r^2; \end{cases}$$

3°
$$\frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad q = -2\sqrt{p^n} + r^2 < 0,$$
$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = +r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} + r^2; \end{cases}$$

4°
$$\frac{q^2}{4} - p^n > 0, \quad q = -2\sqrt{p^n} - r^2,$$
$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = -r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} - r^2. \end{cases}$$

On résume ce qui précède en disant que :
Pour
$$q = +2\sqrt{p^n} \pm r^2 > 0,$$
on a
$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = +4\sqrt{p^n} \pm r^2, \\ f(a_{2k}) = \pm r^2; \end{cases}$$
Pour
$$q = -2\sqrt{p^n} \pm r^2 < 0,$$
on a
$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = \pm r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} \pm r^2. \end{cases}$$

Remarque. — Dans le cas particulier de $q = 0$, on aurait
$$x_n = \sqrt{-p} - \sqrt{-p} = 0,$$
$$x_1 = (\alpha - \alpha^{n-1})\sqrt{-p} = -x_{n-1},$$
$$x_2 = (\alpha^2 - \alpha^{n-2})\sqrt{-p} = -x_{n-2},$$
....
$$x_{\frac{n-1}{2}} = \left(\alpha^{\frac{n-1}{2}} - \alpha^{\frac{n+1}{2}}\right)\sqrt{-p} = -x_{\frac{n+1}{2}},$$
et
$$f(x) = x(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots\left(x^2 - x_{\frac{n-1}{2}}^2\right);$$

il y aurait donc une racine égale à zéro, tandis que les autres seraient deux à deux égales et de signes contraires;

Soit prolongée la tangente Dd' jusqu'à ce qu'elle rencontre les droites BC, BA en des points E, F ; il en résultera un quadrilatère *complet* ABEDFC, ayant pour diagonales AE, BD, FC, et dont les côtés AB, BE, ED, DA, touchent, respectivement, en c', a', d', b' la circonférence inscrite.

Les deux diagonales AE, BD, et les deux cordes de contact $a'b'$, $c'd'$ se coupent en un seul et même point (*); or, BD et $a'b'$ se coupent au point M, donc AE et $c'd'$ passent par ce point.

De même, les cordes de contact $b'd'$, $c'a'$ concourent au point G, intersection des diagonales AE, FC ; et les cordes $a'd'$, $c'b'$ se rencontrent au point H, intersection des diagonales BD, FC.

En outre, les points c, a, G sont en ligne droite, et il en est de même des points c, b, H. Cela résulte des considérations suivantes :

La diagonale FC étant divisée harmoniquement par les deux autres diagonales AE, BD (**), les quatre droites BF, BC, BH, BG forment un faisceau harmonique. Mais les trois premières divisent en deux parties égales la transversale CMN ; donc la quatrième BG est parallèle à la transversale CMN (***).

Par les points G et a, je mène la droite Ga, que je prolonge jusqu'à la rencontre de CN au point O. Les deux triangles GaB, OaC sont égaux, à cause du parallélisme des droites BG, CO et de l'égalité des côtés Ba, Ca; ainsi la droite GO est divisée en deux parties égales au point a. Mais les quatre droites CG, CM, CE, CA

(*) *Voir* l'excellent *Traité de Géométrie élémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse (p. 216).

(**) Page 212 du *Traité de Géométrie élémentaire*, déjà cité.

(***) Page 211 du même ouvrage.

forment un faisceau harmonique; donc la transversale Ga est parallèle à CA, et, par conséquent, elle passe par le point c. En d'autres termes, les points c, a, G sont en ligne droite.

On prouvera de même que AH est parallèle à CN, et que Hb est parallèle à CB. Les trois points c, b, H sont donc aussi en ligne droite.

Actuellement, soient S et P les points où la tangente Dd' rencontre ab et ac prolongées s'il est nécessaire. Je dis qu'on aura

$$\overline{Sd'}^2 = Sa \times Sb \quad \text{et} \quad \overline{Pd'}^2 = Pa \times Pc.$$

En effet, dans le triangle EBF, la droite EA divise en parties proportionnelles la base BF, et sa parallèle aS; donc

$$\frac{SM}{Sa} = \frac{FA}{FB}.$$

La droite DA divise aussi en parties proportionnelles la base BF du triangle DBF, et sa parallèle MS, d'où

$$\frac{Sb}{SM} = \frac{FA}{FB}.$$

Il s'ensuit

$$\overline{SM}^2 = Sa \times Sb.$$

Or,

$$SM = Sd',$$

car le triangle SMd' est semblable au triangle isocèle Fc' d', conséquemment

$$\overline{Sd'}^2 = Sa \times Sb.$$

La droite AC étant parallèle à la base cG du triangle FcG, on a

$$\frac{PG}{Pc} = \frac{DC}{DA};$$

de plus, la similitude des triangles aEG, AEC donne

$$\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{PG}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DA}}.$$

De là,

$$\overline{\mathrm{PG}}^2 = \mathrm{P}a \times \mathrm{P}c.$$

Mais

$$\mathrm{PG} = \mathrm{P}d',$$

parce que Pd'G et D$d'b'$ sont des triangles semblables, et que le dernier est isocèle ; donc

$$\overline{\mathrm{P}d'}^2 = \mathrm{P}a \times \mathrm{P}c.$$

Les égalités

$$\overline{\mathrm{S}d'}^2 = \mathrm{S}a \times \mathrm{S}b \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{P}d'}^2 = \mathrm{P}a \times \mathrm{P}c$$

montrent que les circonférences abd', acd', qui ont le point a commun, sont l'une et l'autre tangentes à la droite Dd' au même point d' ; donc elles coïncident et se confondent avec la circonférence abc. Il en résulte que cette dernière est tangente, au point d', à la circonférence $a'b'c'$ inscrite dans le triangle ABC. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Pour trouver le point de contact d', il n'est pas nécessaire de décrire la circonférence $a'b'c'$. On déterminera d'abord l'un des trois points M, G, H ; par exemple M, intersection des droites ab, $a'b'$. Puis, des extrémités A, B, du côté AB parallèle à ab, on mènera au point M les droites AM, BM, qui, par leurs rencontres avec BC, AC, donneront les sommets E, D du quadrilatère ABED. L'intersection du côté DE de ce quadrilatère et de la droite c'M sera le point d' cherché.

Une construction semblable détermine les points de contact de la circonférence abc, et des cercles ex-inscrits au triangle ABC considéré. G.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 378

(voir tome XVI, page 180);

PAR M. A. GRASSAT,
Élève du lycée de Lyon.

Deux droites fixes A *et* A′ *et deux points fixes* o *et* o′ *sont donnés dans un même plan. Une molécule* M *parcourt la première droite avec un mouvement représenté par l'équation*

$$e = a + bt;$$

et une molécule M′ *parcourt la deuxième droite* A′ *avec un mouvement représenté par l'équation*

$$e = a' + b't.$$

e désigne l'espace, t le temps, et a, b, a′, b′ sont des constantes données. S *et* S′ *étant deux positions simultanées des deux molécules, on demande : 1° de trouver l'équation du lieu géométrique de l'intersection des deux droites* oS, o′S′; *2° l'équation de l'enveloppe de la droite* SS′; *3° de démontrer qu'il existe une relation homographique entre les points* S *et* S′.

1° Je prends pour axes de coordonnées les deux droites A et A′. Soient α, β; α', β' les coordonnées des deux points fixes o, o'; k et k' les distances des positions initiales des deux mobiles à l'origine, les coordonnées des positions simultanées S, S′ seront

$$bt - k \text{ et } 0; \quad 0 \text{ et } b't - k'.$$

Donc les deux droites oS, $o'S'$ auront pour équation

$$y = \frac{\beta}{\alpha + k - bt}(x + k - bt),$$

$$y - b't + k' = \frac{\beta' + k' - b't}{\alpha'} x.$$

On obtiendra le lieu demandé en éliminant t entre ces deux équations, ce qui donne

$$\frac{\beta(x + k) - y(\alpha + k)}{b(\beta - y)} = \frac{\alpha'(y + k') - x(\beta' + k')}{b'(\alpha' - x)}$$

ou

$$b'(x - \alpha')[k(y - \beta) + \alpha y - \beta x]$$
$$= b(y - \beta)[k'(x - \alpha') + \beta' x - \alpha' y].$$

Le lieu est donc une conique passant par les points o et o'.

2° L'équation de SS' étant

$$x(b't - k') + y(bt - k) = (bt - k)(b't - k'),$$

la dérivée par rapport à t donne

$$t = \frac{b'x + by + bk' + kb'}{2bb'}.$$

Substituant dans l'équation première, on a pour enveloppe la courbe représentée par

$$\frac{b'x}{b'x + by + bk' - kb'} + \frac{by}{b'x + by - bk' + kb'} = \frac{1}{2bb'}$$

ou

$$(b'x + by)^2 + (kb' - bk')(b'x - by)$$
$$= \frac{(b'x + by)^2 - (bk' - kb')^2}{2},$$

$$(b'x + by)^2 + 2(kb' - bk')(b'x - by) + (bk' - kb')^2 = 0.$$

C'est donc une conique tangente aux deux droites fixes,

car en y faisant $x = 0$ par exemple, on obtient

$$b^2y^2 - 2by(kb' - bk') + (bk' - bk')^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(by - kb' + kb')^2 = 0.$$

Il en serait de même si on faisait $y = 0$.

3° On peut obtenir ces résultats autrement. Je considère quatre positions simultanées des deux molécules, S, S_1, S_2, S_3, S', S'_1, S'_2, S'_3 : le rapport anharmonique des quatre positions de la première sera

$$r = \frac{SS_1}{S_2S_1} : \frac{SS_3}{S_2S_3} = \frac{b(t'-t)}{b(t''-t')} : \frac{b(t'''-t)}{b(t'''-t'')}$$
$$= \frac{(t'-t)(t'''-t'')}{(t''-t')(t'''-t)};$$

pour la deuxième, ce rapport anharmonique sera

$$r' = \frac{b'(t'-t)}{b'(t''-t')} : \frac{b'(t'''-t)}{b(t'''-t'')} = \frac{(t'-t)(t'''-t'')}{(t''-t')(t'''-t)} = r.$$

Donc les positions simultanées des deux mobiles forment sur les deux droites des divisions homographiques; donc les faisceaux de droites oS, $o'S'$ sont homographiques; donc, d'après un théorème connu, le lieu de leur intersection M est une conique passant par les deux points o et o', et la droite SS' qui joint deux positions simultanées enveloppe une conique tangente aux deux droites fixes A et A'. C. Q. F. D.

Note. — La dernière partie de l'énoncé est une conséquence immédiate du principe de correspondance anharmonique de M. Chasles (voir *Comptes rendus*, t. XLI, p. 1097). D'ailleurs les segments décrits sur les droites A et A' par les points S et S' sont proportionnels. P.

Question 379

(voir tome XVI, page 180);

PAR M. A. GRASSAT.

Mêmes données géométriques; le mouvement du point M *est donné par l'équation*

$$e = at,$$

celui du point M′ *par*

$$et = a'.$$

On demande de trouver : 1° *l'équation du lieu géométrique de l'intersection des droites* oS, o'S′; 2° *l'équation de l'enveloppe de la droite* SS′; 3° *de démontrer qu'il existe entre les points* S, S′ *une relation d'involution.*

1° Je prends encore pour axes les deux droites données. Soient α, β; α', β' les coordonnées des points o et o'; k et k' les distances à l'origine de deux positions initiales. Les coordonnées des points S et S′ seront

$$at - k,\ o \quad \text{et} \quad o,\ \frac{a'}{t} - k';$$

donc oS, o'S′ auront pour équations

$$y - \beta = \frac{\beta}{\alpha + k - at}(x - \alpha),$$

$$y - \beta' = \frac{\beta' + k' - \frac{a'}{t}}{\alpha'}(x - \alpha').$$

L'élimination de t entre ces deux équations donne

$$\frac{\beta(x-\alpha) - (y-\beta)(\alpha + k)}{a(y-\beta)} = \frac{a'(x-\alpha')}{\alpha'(y-\beta') - (x-\alpha')(\beta' + k')}$$

ou

$$aa'(x-\alpha')(y-\beta)$$
$$= [\beta x - \alpha y - k(y-\beta)][\alpha' y - \beta' x - k'(x - \alpha')].$$

Le lieu est donc encore une conique passant par les deux points o et o'.

Si les deux droites données avaient été parallèles, on aurait pris pour axes la droite qui joint les positions initiales et la parallèle à ces droites menée par le milieu de la distance des deux positions initiales; on serait arrivé au même résultat.

2° L'équation de SS' étant

$$x(a'-k't)+ty(at-k)=(at-k)(a'-k't),$$

la dérivée, par rapport à t, égalée à o, donne

$$t=\frac{k'x+ky+aa'+kk'}{2a(y+k')}.$$

L'équation en t peut s'écrire

$$at^2(y+k')-t(k'x+ky+aa'+kk')+a'(x+k)=0;$$

substituant t, on a

$$a(y+k')(k'x+ky+aa'+kk')^2-2a(y+k')$$
$$\times(k'x+ky+aa'+kk')^2+a'(x+k)4a^2(y+k')^2=0,$$

ce qui se décompose en

$$y+k'=0$$

et

$$(k'x+ky+aa'+kk')^2-4aa'(x+k)(y+k')=0.$$

L'enveloppe cherchée est donc une conique tangente aux deux droites

$$x+k=0,$$
$$y+k'=0$$

aux points où elles sont rencontrées par la droite

$$k'x+ky+aa'+kk'=0.$$

Elle est aussi tangente aux deux axes, car en faisant

$x = 0$ on obtient

$$k^2y^2 + 2ky(aa' + kk') - 4kaa'(y + k') + (aa' + kk')^2 = 0$$

ou

$$(ky + kk' - aa')^2 = 0;$$

de même, si on faisait $y = 0$.

Même remarque que précédemment si les droites étaient parallèles.

3° Si je considère quatre positions simultanées des deux molécules, $S, S_1, S_2, S_3, S', S'_1, S'_2, S'_3$, le rapport anharmonique des quatre positions de la première sera

$$r = \frac{SS_2}{S_2S_1} : \frac{S_2S_3}{SS_3} = \frac{a(t'-t)}{a(t''-t')} : \frac{a(t'''-t)}{a(t'''-t'')} = \frac{(t'-t)(t'''-t'')}{(t''-t')(t'''-t)};$$

celui des quatre positions de la deuxième est

$$r' = \frac{a'\left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{t}\right)}{a'\left(\frac{1}{t''} - \frac{1}{t'}\right)} : \frac{a'\left(\frac{1}{t'''} - \frac{1}{t}\right)}{a'\left(\frac{1}{t'''} - \frac{1}{t''}\right)} = \frac{(t'-t)(t'''-t'')}{(t''-t')(t'''-t)} = r.$$

Donc les positions simultanées des deux mobiles forment sur les deux droites des divisions homographiques; donc les faisceaux de droites oS, $o'S'$ sont homographiques; donc leur intersection M décrit une conique passant par o et o', et la droite SS' enveloppe une conique tangente aux deux droites fixes données (*). C. Q. F. D.

(*) Qu'est-ce qu'une relation d'involution entre deux séries de points non situés sur la même droite, dont parle la troisième partie de l'énoncé? Nous avouons n'en rien savoir. M. Grassat se contente de démontrer que les deux séries de points sont homographiques : ce qui résulte d'ailleurs du principe de correspondance anharmonique. P.

Question 716

(voir 2e série, t. III, p. 445);

PAR M. LACAUCHIE,
Élève de Sainte-Barbe.

Quatre cercles OA′C′B′, OAB′C, OBCA′, OAC′B *passent par un même point* O. *Prouver que les points de concours des cordes* OA′, BC; OB′, AC; OC′, AB *sont en ligne droite; ou encore* OA, B′C; OB, A′C; OC′, A′B′; *etc.* (MENTION.)

Soient α, β, γ les points de concours des cordes OA′, BC; OB′, AC; OC′, AB. Les points B, C, A′, O étant sur une même circonférence, on a la relation

$$\alpha B . \alpha C = \alpha O . \alpha A'.$$

Donc α est un point de l'axe radical du cercle OA′C′B′ et du cercle circonscrit au triangle ABC. On prouverait de même que β et γ sont des points du même axe radical. La proposition est donc démontrée.

Note du Rédacteur. — M. L. Cousin, représentant par $C = 0$, $C' = 0$, etc., les équations des quatre cercles, trouve pour les équations des droites OA′, OB′, etc., les équations $C - C'' = 0$, $C - C' = 0$, etc., et parvient facilement à la démonstration du théorème. M. Fontaneau démontre la proposition en s'appuyant sur un théorème qui lui appartient et que nous ferons connaître prochainement.

Même question;

PAR M. BARRÈRE,
Élève du lycée de Nîmes.

On sait que les circonférences circonscrites aux quatre triangles d'un quadrilatère complet se coupent en un point O. Si je prends ce point pour pôle de transformation, la figure réciproque du système des droites (1),

(2), (3), (4) sera un système de quatre circonférences passant par un même point, savoir :

OA′C′B′, OAB′C, OBCA′, OAC′B.

Le point de concours α de OA′ et de BC deviendra, dans la figure réciproque, un point α' situé sur la circonférence passant par les points d'intersection des droites (2) et (3), (3) et (4), car BC passant par les points d'intersection des cercles OAB′C et OBCA′, OAC′B et OBCA′, la circonférence qui est sa figure réciproque doit passer par les points d'intersection des droites réciproques de ces cercles.

De même, β, point de concours de OB′ et de AC, deviendra, dans la figure réciproque, un point β' situé sur la circonférence passant par les points d'intersection des droites (2) et (3), (2) et (4), c'est-à-dire sur la même circonférence que précédemment. De même pour l'autre point de concours de OC′ et de AB; donc les trois points α, β, γ sont en ligne droite, puisque leurs réciproques sont sur une même circonférence passant par le pôle de transformation (*).

CORRESPONDANCE.

1. Nous avons reçu trop tard pour la mentionner dans notre numéro de mars une solution de la question 700 par M. Beltrami, professeur à l'Université de Pise. Comme M. Durrande, M. Beltrami emploie les

(*) Cette démonstration suppose que quatre cercles qui passent par un même point peuvent être considérés comme les réciproques de quatre droites telles, que les quatre circonférences circonscrites aux quatre triangles du quadrilatère complet formé par ces droites passent par le pôle de transformation. Cela est-il toujours possible ? P.

coordonnées elliptiques et arrive à l'équation

$$(1) \qquad \mu^2 + \nu^2 = \beta^2;$$

mais il conclut le théorème de M. Strebor de ce que cette équation ne contient pas le paramètre ρ, parce qu'en général, dans tout système de coordonnées curvilignes et orthogonales, toute équation qui ne renferme que deux paramètres (μ, ν) coupe orthogonalement toutes les surfaces caractérisées par une valeur constante du troisième paramètre (ρ). M. Beltrami fait en outre les observations suivantes : 1° le lieu des sections circulaires diamétrales des hyperboloïdes homofocaux à une nappe coupe orthogonalement ces hyperboloïdes ; 2° l'équation (1) représente une surface du quatrième degré et possède une droite double qui est l'axe des y ; tout plan mené par cette droite coupe la surface suivant un cercle.

2. *M. Frédéric Burnier, de Morges, canton de Vaud* (*Suisse*). — « Je prends la liberté de vous communiquer une formule qui peut être considérée comme une extension de celle de Maskelyne pour le calcul des logarithmes des sinus et des tangentes des petits angles. J'y suis arrivé en développant $\log \frac{\sin x}{x}$ et $\log \operatorname{séc} x = -\log \cos x$ en séries, puis en renversant la seconde et substituant dans la première. On trouve ainsi

$$\log \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3} \log \operatorname{séc} x + \frac{4}{45 . \mathrm{M}} (\log \operatorname{séc} x)^2 - \frac{8}{2835\, \mathrm{M}^2} (\log \operatorname{séc} x)^3 + \ldots$$

Le dernier terme écrit atteint une unité du neuvième ordre décimal pour une valeur de $\log \operatorname{séc} x$ correspondant à l'angle de $7^\circ 49'$. En le négligeant on aurait la for-

mule pratique suivante :

$$\log \frac{\sin x}{x} = \log 1'' - \frac{1}{3} \log \text{séc} x + 0,204674 (\log \text{séc} x)^2.$$

De même pour la tangente,

$$\log \frac{\text{tang} x}{x} = \log 1'' + \frac{2}{3} \log \text{séc} x + 0,204674 (\log \text{séc} x)^2. »$$

Nous remercions M. Burnier pour la communication de ces formules, qui peuvent être utiles dans le calcul des quantités S et T des Tables de logarithmes (*).

3. *La différence entre l'aire de la podaire du centre d'une ellipse et l'aire de la podaire du centre de la développée est égale à l'aire de l'ellipse donnée.* Ce théorème est communiqué, avec une démonstration purement analytique, par MM. Flandre et Grassat, élèves du lycée de Lyon.

4. *M. Picart, professeur au lycée Charlemagne.* — Si ρ désigne le rayon de courbure d'une courbe en un point, ds l'élément de la courbe, l'angle ε, que forme le rayon vecteur allant du foyer de la parabole osculatrice avec la normale, sera donné par la formule

$$3 \,\text{tang}\, \varepsilon = \frac{d\rho}{ds};$$

la longueur de ce rayon vecteur est $\frac{\rho}{2} \cos \varepsilon$. Le paramètre de la parabole osculatrice est $\rho \cos^3 \varepsilon$. De là on déduit ce théorème : *Le lieu des foyers des paraboles osculatrices à une spirale logarithmique est une spirale semblable.*

5. Soient M un point d'une ellipse ayant pour axes

(*) Depuis que ceci est écrit, M. Burnier a publié ses formules dans le *Bulletin de la Société vaudoise*, n° 52.

$2a$ et $2b$; M′ et M″ les points du cercle construit sur le grand axe comme diamètre, et situés sur une perpendiculaire à cet axe menée par M; O le centre de l'ellipse : *La normale à l'ellipse au point* M *rencontre les rayons* OM′ *et* OM″ *aux points* P, P′ *situés sur des cercles concentriques à l'ellipse et ayant respectivement pour rayons* $a+b$ *et* $a-b$.

Ce théorème est une conséquence évidente de la règle connue pour construire une ellipse dont on a deux diamètres conjugués. M. Durrande, qui nous le communique, en déduit le moyen de construire une normale à l'ellipse, sans que la courbe soit tracée. Le théorème de M. Durrande s'énonce encore de la manière suivante : *Si dans deux cercles concentriques on mène deux rayons variables* OP *et* OP′ *également inclinés sur un diamètre fixe, le milieu* M *de* PP′ *décrira une ellipse ayant* PP′ *pour normale au point* M, *et pour axes la somme et la différence des rayons des cercles.*

Le même théorème et ses conséquences pour mener des normales à l'ellipse ont été donnés par M. Egger, professeur à Pavie, dans le tome VI, n° 1, des *Annali di Matematica,* livraison qui porte la date de 1864, quoique ayant paru au mois de janvier 1865.

6. On nous a demandé ce que signifie l'expression *podaire négative* d'une courbe, employée dans la question 718, p. 48. On entend par là une courbe dont la podaire est la courbe proposée.

7. M. Rafaele Rubini nous fait savoir que c'est à tort qu'on lui a attribué la solution de la question 398, p. 76, dont il ne s'est jamais occupé. Nous avons été induit en erreur à cette occasion par une mention de M. Terquem qui attribuait à M. Rubini cet article sans signature.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

VI.

V.-A. Le Besgue. — *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers.* In-8 de IV-36 pages. Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 1 fr. 50 c.

Une disposition ingénieuse permet de concentrer en 18 pages tous les diviseurs des nombres depuis 1 jusqu'à 115 500. Cette simplification réduirait à 1000 pages in-8 les Tables de Burchardt et de Dahse, dont la dernière va jusqu'à 7 000 000. La Table de M. Le Besgue a été calculée par M. Hoüel.

VII.

Hoüel (Jules). — *Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques,* suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction de Gauss et de diverses Tables usuelles. 2e édition revue et augmentée. In-8 de XLVIII-118 pages. Paris, 1864, Gauthier-Villars. — Prix : 2 francs.

Cette seconde édition a été enrichie d'additions grâce auxquelles ces Tables satisfont à toutes les exigences de la théorie, et à presque tous les besoins de la pratique. Nous signalerons d'abord un recueil méthodique de tableaux, qui renferment en huit pages toutes les formules d'Algèbre et de Trigonométrie dont on a besoin pour les calculs des triangles rectilignes ou sphériques. Ces formules, dispersées dans les Traités de Trigonométrie, se trouvent ici rassemblées et disposées avec clarté.

L'auteur, pour éviter quelques objections qui s'étaient élevées contre l'introduction de la première édition dans certains concours, a disposé les matières de manière qu'on puisse facilement séparer le volume en deux parties, dont la seconde ne contient aucun des nombres ni aucune des formules qu'un élève peut être tenu de savoir par cœur.

Les Tables à quatre et à trois décimales, qui comprenaient deux pages dans la première édition, ont été modifiées de manière à en rendre l'usage plus commode, et ont été augmentées de deux nouvelles Tables, dont la première donne les *antilogarithmes*, c'est-à-dire les nombres correspondant à des logarithmes donnés, et l'autre les logarithmes naturels ou hyperboliques, appelés souvent (à tort peut-être) logarithmes *népériens* (*). Cette dernière Table est disposée de façon à fournir immédiatement le logarithme naturel d'un nombre quelconque, et son usage est presque aussi prompt que celui des logarithmes décimaux.

Le volume est terminé par une Table d'une seule page, qui forme un complément même aux Tables de Callet, et qui permet de calculer assez promptement, avec neuf ou dix décimales exactes, les lignes trigonométriques naturelles d'un angle quelconque. Nous aurions encore à mentionner diverses améliorations de détail, dont un calculateur exercé appréciera l'utilité.

L'ouvrage de M. Hoüel forme maintenant un *Manuel logarithmique* complet, qui, sous le rapport de la correction et de l'exécution typographique, peut rivaliser avec les publications les plus estimées de la France et de l'étranger.

L'auteur, encouragé par l'accueil que son livre a trouvé chez les savants d'Allemagne, a fait paraître, avec cette seconde édition, une traduction allemande du texte qui accompagne les Tables. Un compte rendu très-favorable en a été donné par M. Grünert dans ses *Archives*.

(*) Voyez *Nouvelles Annales*, t. XIV, *Bulletin de Bibliographie*, p. 48.

VIII.

POUDRA. — *Histoire de la perspective ancienne et moderne, contenant l'analyse d'un grand nombre d'ouvrages sur la perspective et la description des procédés qu'on y trouve.* In-8 de IV-586 pages, avec un atlas de 12 planches. Paris, Corréard, 1864. — Prix : 15 fr.

M. Cremona vient de consacrer à cet ouvrage deux articles dans la *Rivista italiana* (n^{os} des 10 et 17 avril 1865). Après avoir rendu justice au zèle et à l'érudition de l'auteur, le savant professeur de Bologne regrette qu'un livre si utile à tous ceux qui s'occupent de perspective laisse beaucoup à désirer sous le rapport typographique. Les titres des ouvrages, les noms des auteurs sont souvent estropiés, et plusieurs citations latines sont rendues presque inintelligibles. « *Ma,* ajoute M. Cremona, *queste inezie non iscemano punto il merito del signor Poudra, il quale ha reso colla sua nova publicazione un insigne serviggio ai geometri e agli artisti.* » La responsabilité de ces fautes doit revenir à l'éditeur, qui, par une économie mal entendue, n'a pas voulu qu'il fût tiré plus d'une épreuve de chaque feuille.

IX.

STEGEMAN. — Grundriss... *Principes de calcul différentiel et de calcul intégral avec des applications.* 2 volumes in-8 de VIII-256 et XIV-322 pages. Hannover; Helwing, 1862-63.

Figures en blanc sur fond noir. — Disposition méthodique des matières. — Nombreuses applications.

X.

ARISTIDE MARRE. — *Le Talkhys d'Ibn Albannâ,* publié et traduit. Rome, 1865. In-4 de XII-32 pages. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei,* t. XVII, 5 juin 1864.)

On trouve dans cet ouvrage, publié sous les auspices du

prince Boncompagni, les égalités suivantes :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2,$$
$$1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3=(1+3+5+\ldots+2n-1)$$
$$\times[2(1+3+\ldots+2n-1)-1],$$
$$2^3+4^3+\ldots+(2n)^3=(2+4+\ldots+2n)$$
$$2(2+4+\ldots+2n).$$

Abou'l Abbas Ahmed ben Mohammed Othman Alazâdi, surnommé Ibn Albannâ (fils de l'architecte ou fils du maçon), enseignait les Mathématiques avec éclat au Maroc, l'an 1222 de notre ère.

XI.

WOEPCKE. — *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes, extraits de deux manuscrits arabes inédits du British Museum.* Rome, 1864. In-4 de IV-26 pages.

On trouve dans cet opuscule un passage d'un ouvrage d'Ahmed Ibn Almadjdî, mort vers 1446 : dans ce passage sont démontrées les formules

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2,$$
$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1),$$
$$2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2(2+4+\ldots+2n)^2.$$

Un autre extrait (p. 24 et 25), tiré de la *Clef du calcul* et composé par Djamchîd ben Mas'oud ben Mahmoûd le médecin, surnommé Ghiyâth (Eddin) Alqâchânî, un des astronomes qui prirent part à la rédaction des Tables d'Oloug Beg, donne la première des formules ci-dessus et la suivante :

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\left\{\frac{1}{5}[1+2+\ldots+(n-1)+n-1]+(1+2\ldots+n)\right\}(1^2+2^2+\ldots+n^2)$$
$$=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

XII.

Aristide Marre.—*Kholâçat al Hissâb, ou Quintessence du calcul, par Behâ Eddin al Aamouli.* Rome, 1864. In-8 de XII-82 pages. — Prix : 2 fr. 50 c.

Deuxième édition, revue, corrigée et augmentée de nouvelles notes. La première édition avait paru en 1846, dans les *Nouvelles Annales.*

XIII.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris, t. II, janvier-février 1865. In-8 de 26 pages.

Ce recueil se publie tous les trimestres. Le prix de l'abonnement pour l'année est de 5 francs. Le numéro que nous avons sous les yeux contient :

Bour, *Sur la somme des puissances semblables des nombres premiers.* — Mannheim, *Construction de la tangente en un point de la ligne d'ombre d'une surface de révolution.* — Abel Transon, *Sur une imperfection dans la règle ordinaire pour les maxima et les minima.* — Moutard, *Théorème sur les surfaces du troisième ordre.*

L'article de M. Bour, malgré son titre, ne se rapporte qu'à la somme des puissances des nombres de la suite naturelle. L'auteur arrive à cette conclusion qu'on peut passer de S_{2n} à S_{2n+1} par une intégration. Dans une note il est dit que j'ai fait une remarque analogue. Il serait plus exact de dire que j'ai fait une remarque beaucoup plus générale, puisque j'ai montré qu'on peut, au moyen de l'intégration, passer de S_n à S_{n+1}, quel que soit n. Au reste, c'est là un cas très-particulier de la formule

$$\frac{d}{dn}\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}} f(x) = \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}} f'(x) + c$$

dont j'ai développé les nombreuses applications dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. X, 1851, p. 186, et ensuite dans les Notes qui font suite au *Cours d'Analyse* de Sturm.

P.

ÉQUATIONS TÉTRAÉDRIQUES

des surfaces du second ordre circonscrites aux sommets ou inscrites aux faces ou aux arêtes d'un tétraèdre quelconque;

PAR M. J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

I. — SURFACES CIRCONSCRITES.

1. Si l'on désigne par

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0$$

les équations des quatre faces d'un tétraèdre quelconque rapporté à des coordonnées obliques ou orthogonales, toute surface du second ordre (*) pourra être représentée par l'équation homogène (**)

$$(1) \quad A_1^2 PQ + A_3^4 RS + A_1^3 PR + A_2^4 QS + A_1^4 PS + A_2^3 QR + B_1 P^2 + B_2 Q^2 + B_3 R^2 + B_4 S^2 = 0,$$

car celle-ci renferme neuf arbitraires, ce qui est le nombre de conditions distinctes que comporte ce genre de surfaces.

Nous nous proposerons ici de déterminer les formes spéciales que prend cette équation lorsqu'on assujettit la surface à être circonscrite aux quatre sommets, inscrite

(*) Comme nous ne considérerons ici que ce genre de figures, nous nous contenterons de les distinguer sous le nom de *surfaces*.

(**) Dans le symbole A_1^2 on doit voir non un exposant, mais deux indices que j'introduis en vue de la symétrie des calculs. Ces indices sont d'ailleurs indépendants, et on peut écrire indifféremment A_1^2 ou A_2^1, ce qui peut être utile pour les permutations tournantes.

entre les quatre faces, ou inscrite entre les six arêtes du tétraèdre.

2. *Surfaces circonscrites.* — Pour que la surface passe par le sommet QRS, il faut que la formule (1) ne renferme aucun terme indépendant de ces trois quantités, c'est-à-dire que $B_1 = 0$. Les autres carrés devant disparaître pour la même raison, nous obtenons l'équation

$$(2)\quad A_1^2 PQ + A_3^4 RS + A_1^3 PR + A_2^4 QS + A_1^4 PS + A_2^3 QR = 0,$$

qui est la plus générale, car elle renferme cinq arbitraires, et la surface se trouve déjà assujettie à quatre conditions.

3. *Plan tangent.* — Les plans tangents aux quatre sommets sont représentés par les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1^2 Q + A_1^3 R + A_1^4 S = 0, \\ A_1^2 P + A_2^3 R + A_2^4 S = 0, \\ A_1^3 P + A_2^3 Q + A_3^4 S = 0, \\ A_1^4 P + A_2^4 Q + A_3^4 R = 0. \end{array}\right.$$

En effet, pour ce qui concerne le dernier, par exemple, il est évident d'abord qu'il passe par le sommet PQR. Si de plus on le coupe par la surface, comme son équation n'est autre que le coefficient de S dans la formule (2), celle-ci se réduit à un polynôme homogène en P, Q, R, et par suite aussi en P, Q seulement, puisque R se trouve lui-même exprimé d'une manière homogène en fonction de P et Q par l'équation (3). Or, une pareille expression revient toujours à la somme ou à la différence de deux carrés, et par suite l'intersection est formée de deux droites réelles ou imaginaires, ce qui est le caractère du plan tangent.

4. Les quatre plans (3) forment le tétraèdre polaire

conjugué du précédent par rapport à la surface (2). Si nous les désignons en abrégé par

$$(4) \qquad p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

l'équation de la surface prend la forme élégante

$$(5) \qquad Pp + Qq + Rr + Ss = 0.$$

II. — Surfaces inscrites aux faces.

5. Cette dernière formule représente une surface qui està la fois circonscrite aux sommets du tétraèdre PQRS, et inscrite aux faces du tétraèdre $pqrs$. Pour retrouver sous une forme explicite en P, Q, R, S l'équation (2) des surfaces circonscrites, il suffirait d'y rendre à p, q, r, s leurs valeurs (3). Si au contraire nous substituons à P, Q, R, S leurs expressions en fonction de p, q, r, s tirées des mêmes équations (3), nous aurons sous une forme également explicite l'équation de la surface inscrite aux faces de $pqrs$.

Pour simplifier l'écriture nous poserons

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_1^2 A_3^4 + A_1^3 A_2^4 - A_1^4 A_2^3 &= L, \\ A_1^2 A_3^4 - A_1^3 A_2^4 + A_1^4 A_2^3 &= M, \\ - A_1^2 A_3^4 + A_1^3 A_2^4 + A_1^4 A_2^3 &= N. \end{aligned} \right.$$

Alors l'élimination fournit les valeurs

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= 2p . A_2^3 A_2^4 A_3^4 - A_3^4 N . q - A_2^4 M . r - A_2^3 L . s, \\ Q &= 2q . A_1^3 A_1^4 A_3^4 - A_1^4 L . r - A_1^3 M \; s - A_3^4 N . p, \\ R &= 2r . A_1^2 A_1^4 A_2^4 - A_1^2 N . s - A_2^4 M . p - A_1^4 L . q, \\ S &= 2s . A_1^2 A_1^3 A_2^3 - A_2^3 L . p - A_1^3 M . q - A_1^2 N . r, \end{aligned} \right.$$

en omettant dans chacune d'elles le dénominateur commun, auquel il est inutile d'avoir égard puisque ces résultats sont destinés à être substitués dans une relation homogène.

Si l'on effectue cette substitution, il vient

$$(8)\quad \begin{cases} A_2^3 A_2^4 A_3^4 . p^2 + A_1^3 A_1^4 A_3^4 . q^2 + A_1^2 A_1^4 A_2^4 . r^2 + A_1^2 A_1^3 A_2^3 . s^2 \\ \quad = (A_1^4 qr + A_2^3 sp) L + (A_1^3 qs + A_2^4 pr) M \\ \quad\quad + (A_3^4 pq + A_1^2 rs) N; \end{cases}$$

ou, en rendant l'expression complétement explicite,

$$(9)\quad \begin{cases} A_2^3 A_2^4 A_3^4 . p^2 + A_1^3 A_1^4 A_3^4 . q^2 + A_1^2 A_1^4 A_2^4 . r^2 + A_1^2 A_1^3 A_2^3 . s^2 \\ \quad - (A_1^2 A_3^4 + A_1^3 A_2^4 - A_1^4 A_2^3)(A_1^4 qr + A_2^3 sp) \\ \quad - (A_1^2 A_3^4 - A_1^3 A_2^4 + A_1^4 A_2^3)(A_1^3 qs + A_2^4 pr) \\ \quad - (- A_1^2 A_3^4 + A_1^3 A_2^4 + A_1^4 A_2^3)(A_3^4 pq + A_1^2 rs) = 0, \end{cases}$$

ce qui est bien l'équation la plus générale (*), car elle renferme cinq arbitraires, et la surface se trouve déjà astreinte à quatre conditions.

6. *Point de contact.* — Pour avoir le point de contact de la surface avec la face s, il suffit de faire dans l'équation (8) $s = 0$. Le résultat peut alors se mettre sous la forme

$$N\left(\frac{p}{A_1^4} - \frac{q}{A_2^4}\right)^2 + L\left(\frac{q}{A_2^4} - \frac{r}{A_3^4}\right)^2 + M\left(\frac{r}{A_3^4} - \frac{p}{A_1^4}\right)^2 = 0.$$

Si les trois quantités L, M, N (6) sont de même signe, il devient nécessaire d'annuler séparément les trois carrés, ce qui ne fournit que deux équations distinctes, c'est-à-

(*) Comme cette équation est compliquée, il ne sera pas inutile d'indiquer les formes suivantes, qui sont particulières mais plus simples :

$$\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2 + \delta^2 s^2 - \alpha\beta pq - \gamma\delta rs - \alpha\gamma pr - \beta\delta qs - \alpha\delta ps - \beta\gamma qr = 0,$$

$$\alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 + \gamma^2 r^2 + \delta^2 s^2 = \sqrt{2}(\alpha p + \beta q)(\gamma r + \delta s),$$

qui représentent des surfaces convexes d'après la remarque du n° 6.

dire une droite réelle, et par son intersection avec la face s, un point unique. Dans le cas contraire on aura en outre deux plans réels menés par cette droite et coupant la face s suivant deux génératrices. Ainsi donc la surface sera convexe ou réglée suivant que les trois trinômes L, M, N seront ou non de même signe.

Dans tous les cas les droites qui joignent chaque sommet au point de contact de la face opposée auront pour équations

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p}{A_1^4} = \dfrac{q}{A_2^4} = \dfrac{r}{A_3^4}, \\ \dfrac{q}{A_1^2} = \dfrac{r}{A_1^3} = \dfrac{s}{A_1^4}, \\ \dfrac{r}{A_2^3} = \dfrac{s}{A_2^4} = \dfrac{p}{A_1^2}, \\ \dfrac{s}{A_3^4} = \dfrac{p}{A_1^3} = \dfrac{q}{A_2^3}. \end{array} \right.$$

En adjoignant à ces quatre systèmes respectifs les relations (4), nous obtiendrons les sommets du tétraèdre polaire conjugué de $pqrs$ par rapport à la surface (9).

III. — Surfaces inscrites aux arêtes.

7. Pour que l'arête RS soit tangente à la surface, il faut que les trois termes qui ne renferment ni R ni S forment un carré parfait, car l'équation résultant des hypothèses $R = S = 0$ représente alors un plan unique. On doit donc avoir

$$(A_1^2)^2 = 4 B_1 B_2,$$

ou, en désignant par C les racines des arbitraires B,

$$A_1^2 = \pm 2 C_1 C_2.$$

On obtient ainsi l'équation (*)

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} C_1^2P^2+C_2^2Q^2+C_3^2R^2+C_4^2S^2-2C_1C_2PQ-2C_3C_4RS \\ \quad -2C_1C_3PR-2C_2C_4QS-2C_1C_4PS-2C_2C_3QR=0, \end{array} \right.$$

qui est la plus générale, puisqu'elle renferme trois arbitraires et que nous avons imposé à la surface six conditions.

8. *Point de contact.* — Le point de contact de l'arête RS avec la surface est alors déterminé par les équations

$$(12)\qquad R=0,\quad S=0,\quad (C_1P-C_2Q)^2=0,$$

dont la dernière représente le plan qui le réunit à l'arête opposée.

9. Si nous considérons à la fois les six plans qui joignent chaque arête au point de contact de l'arête opposée, ils seront représentés par le système

$$(13)\qquad \left\{ \begin{array}{l} C_1P=C_2Q, \\ C_3R=C_4S, \\ C_1P=C_3R, \\ C_2Q=C_4S, \\ C_1P=C_4S, \\ C_2Q=C_3R. \end{array} \right.$$

(*) A la vérité, on doit au premier abord remplacer tous les signes négatifs par de doubles signes, mais une discussion que je supprime ici montre que l'on peut s'en tenir à la forme (11).

En effet, les six doubles signes fournissent outre cette équation $2^6-1=63$ combinaisons, dont 7 peuvent être rejetées comme *inutiles*, car elles dérivent de (11) par les changements de signes des quantités C_1, C_2, C_3, C_4; 8 autres comme *étrangères*, en ce qu'elles sont des carrés parfaits se rapportant à des plans uniques, et les 48 dernières comme représentant des cônes qui ont leur sommet sur l'une des arêtes. Ce sont là en

On voit que toutes ces formules rentrent dans les trois suivantes :

$$(14) \qquad C_1 P = C_2 Q = C_3 R = C_4 S,$$

d'où ce théorème :

Dans toute surface inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, les six plans menés par chaque arête et le point de contact de l'arête opposée se croisent au même point.

10. *Plan tangent.* — Le plan tangent au point de contact de l'arête RS (12) a pour équation

$$C_3 R + C_4 S = 0.$$

En effet, si nous introduisons cette hypothèse dans l'équation (11) de la surface, elle se réduit à la forme

$$(C_1 P - C_2 Q)^2 + 4 C_3^2 R^2 = 0,$$

qui est une somme absolue de deux carrés et oblige d'adjoindre à l'équation du plan, pour avoir son intersection avec la surface, deux nouvelles relations du premier degré qui déterminent un point unique.

Remarquons en passant, d'après cela, que *lorsqu'une surface est inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, elle est nécessairement convexe et jamais gauche.*

11. Si nous envisageons l'ensemble des six plans tangents suivant les couples d'arêtes opposées, nous formerons le tableau

$$(15) \begin{cases} C_1 P + C_2 Q = 0, \\ C_3 R + C_4 S = 0, \end{cases} \begin{cases} C_1 P + C_3 R = 0, \\ C_2 Q + C_4 S = 0, \end{cases} \begin{cases} C_1 P + C_4 S = 0, \\ C_2 Q + C_3 R = 0. \end{cases}$$

---

effet des solutions que la marche que nous avons suivie devait nous faire rencontrer, mais qui ne constituent pas le contact proprement dit d'une surface courbe avec les six arêtes.

On voit que chacun de ces systèmes satisfait identiquement l'équation

$$(16) \qquad C_1 P + C_2 Q + C_3 R + C_4 S = 0,$$

d'où ce théorème :

Dans toute surface inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, les trois intersections des couples de plans tangents suivant des arêtes opposées sont comprises dans un même plan.

12. *Tétraèdre polaire.*—Les plans polaires des quatre sommets du tétraèdre par rapport à la surface (11) ont pour équations :

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} C_1 P + C_2 Q + C_3 R - C_4 S &= 0, \\ C_1 P + C_2 Q - C_3 R + C_4 S &= 0, \\ C_1 P - C_2 Q + C_3 R + C_4 S &= 0, \\ -C_1 P + C_2 Q + C_3 R + C_4 S &= 0. \end{aligned} \right.$$

En effet, la dernière, par exemple, est identiquement satisfaite par le système (12) qui représente le point de contact de l'arête RS; et il en serait de même pour les deux autres arêtes QR, QS qui aboutissent au sommet QRS.

On peut vérifier d'après cela que les sommets du tétraèdre polaire fourni par les intersections de ces plans trois à trois auront pour équations :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} C_1 P &= C_2 Q = C_3 R = -C_4 S, \\ C_1 P &= C_2 Q = -C_3 R = C_4 S, \\ C_1 P &= -C_2 Q = C_3 R = C_4 S, \\ -C_1 P &= C_2 Q = C_3 R = C_4 S. \end{aligned} \right.$$

13. Si l'on réduit chacun de ces systèmes de trois équations à deux seulement en écartant les membres affectés de signes négatifs, on obtiendra les équations des

droites qui joignent chaque sommet du tétraèdre proposé au pôle correspondant. On voit que toutes ces relations sont satisfaites par le système (14); d'où ce théorème :

Dans toute surface inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre quelconque, les droites qui joignent chaque sommet au sommet correspondant du tétraèdre polaire se croisent en un même point qui est en même temps le point de concours des plans menés par chaque arête et le point de contact de l'arête opposée (*).

IV. — Surfaces concentriques.

14. *Coordonnées bimédianes.* — Les quatre polynômes que nous avons désignés par P, Q, R, S ne renferment au fond que trois variables distinctes x, y, z et par suite doivent avoir entre eux une relation qui est d'ailleurs nécessairement linéaire. La manière la plus simple de la formuler consiste à caractériser le tétraèdre par son centre de gravité P', Q', R', S'. Cette relation sera alors

$$(19) \qquad \frac{P}{P'} + \frac{Q}{Q'} + \frac{R}{R'} + \frac{S}{S'} = 4,$$

car si l'on annule Q, R, S, la quantité P représentera la valeur que prend ce polynôme au sommet de la médiane,

---

(*) On sait, d'après un théorème de M. Chasles, que lorsqu'il s'agit d'une surface et d'un tétraèdre quelconques, ces droites appartiennent en général à un même système de génératrices d'un certain hyperboloïde gauche. On voit par suite que dans le cas actuel cet hyperboloïde se réduit à un cône.

On sait également que les intersections des faces correspondantes des deux tétraèdres jouissent de la même propriété. Mais il ne saurait être question alors de réduire l'hyperboloïde à un cône, puisque les faces qui renferment ces droites passeraient elles-mêmes par un point unique et cesseraient d'appartenir à un tétraèdre.

valeur quatre fois plus grande que celle P′, qui est relative au centre de gravité situé au quart de cette médiane, puisque P s'annule à l'autre extrémité et varie proportionnellement à la distance.

Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées ont pour équations :

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{P}{P'}=\dfrac{Q}{Q'}, \\ \dfrac{R}{R'}=\dfrac{S}{S'}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{P}{P'}=\dfrac{R}{R'}, \\ \dfrac{Q}{Q'}=\dfrac{S}{S'}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{P}{P'}=\dfrac{S}{S'}, \\ \dfrac{Q}{Q'}=\dfrac{R}{R'}, \end{cases}$$

car la première, par exemple, passe par les milieux

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=2R',\quad S=2S',$$
$$P=2P',\quad Q=2Q',\quad R=0,\quad S=0,$$

des arêtes PQ et RS. Pour éviter une longue périphrase, j'appellerai ces droites les *bimédianes* du tétraèdre.

Les trois plans qui forment les bimédianes deux à deux ont pour équations :

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{P}{P'}+\dfrac{Q}{Q'}=\dfrac{R}{R'}+\dfrac{S}{S'}, \\ \dfrac{P}{P'}+\dfrac{R}{R'}=\dfrac{Q}{Q'}+\dfrac{S}{S'}, \\ \dfrac{P}{P'}+\dfrac{S}{S'}=\dfrac{Q}{Q'}+\dfrac{R}{R'}, \end{cases}$$

car la première, par exemple, se trouve satisfaite par chacun des deux derniers groupes (20).

Ces droites et ces plans constituent le système d'axes le plus simple auquel on puisse rapporter le tétraèdre. Nous les appellerons *coordonnées bimédianes*, et nous les désignerons par U, V, W. Ces lettres représenteront dès lors les expressions (21) réunies dans un seul membre.

15. *Surfaces concentriques au tétraèdre et ayant les*

bimédianes pour diamètres conjugués. — Il serait facile d'avoir l'équation générale des surfaces assujetties simplement à avoir leur centre au centre de gravité du tétraèdre. Mais, pour plus de simplicité dans les formules, j'imposerai en outre la condition que les bimédianes forment un système de diamètres conjugués.

L'équation peut alors s'écrire immédiatement sous la forme suivante, en fixant le terme constant en vue de la simplification des calculs,

$$(22) \qquad a\mathrm{U}^2 + b\mathrm{V}^2 + c\mathrm{W}^2 = 16,$$

ou, en revenant aux coordonnées tétraédriques (21) et (19),

$$a\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'}-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}-\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}\right)^2 + b\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}-\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}\right)^2$$
$$+ c\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}-\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'}-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}+\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'}+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}+\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}\right)^2 = 0,$$

et en développant,

$$(a+b+c-1)\left[\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}\right)^2\right]$$
$$+2(\;\;a-b-c-1)\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{P'Q'}}+\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{R'S'}}\right)$$
$$+2(-a+b-c-1)\left(\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{P'R'}}+\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{Q'S'}}\right)$$
$$+2(-a-b+c-1)\left(\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{P'S'}}+\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{Q'R'}}\right) = 0,$$

ce qu'on peut écrire plus simplement

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'}\right)^2+\alpha\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{P'Q'}}+\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{R'S'}}\right)\\ \qquad +\beta\left(\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{P'R'}}+\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{Q'S'}}\right)+\gamma\left(\frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{P'S'}}+\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{Q'R'}}\right)=0.\end{array}\right.$$

Cette équation est la plus générale, car elle renferme trois arbitraires, et la surface a été assujettie à six conditions.

16. *Surfaces concentriques au tétraèdre et ayant les bimédianes pour diamètres conjugués* ÉGAUX. — Imposons-nous de plus la condition que les bimédianes forment des diamètres conjugués *égaux* et supposons-les d'abord réels, c'est-à-dire la surface ellipsoïdale. Nous devrons poser $a = b = c$, et par suite $\alpha = \beta = \gamma$, ce qui donne (*)

$$(24)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\\&+\varpi\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

équation la plus générale puisqu'elle renferme encore un paramètre. Elle fournit une famille bien déterminée d'ellipsoïdes qui sont évidemment homothétiques.

17. On peut démontrer à cet égard le théorème suivant : *Si un ellipsoïde a pour diamètres conjugués égaux les bimédianes d'un tétraèdre, il coupe ses faces suivant des ellipses qui ont pour centres les centres de gravité de ces faces.*

On aura en effet, en coupant la surface (24) par le

(*) Les paramètres sont alors reliés par la formule

$$\varpi = \frac{2(a-b-c-1)}{a+b+c-1} = -\frac{2(a+1)}{3a-1},$$

$$a = \frac{\varpi-2}{3\varpi+2},$$

dont nous aurons besoin plus loin.

plan $S = 0$,

$$\left(\frac{P}{P'}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \varpi\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{PR}{P'R'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) = 0.$$

Or les équations dérivées relatives à P et Q, en considérant R comme leur fonction d'après l'équation (19) où l'on a fait $S = 0$, se réduisent à

$$\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'},$$

qui sont les équations de la médiane du sommet opposé à la face S, aboutissant par conséquent au centre de gravité de cette face.

18. Pour obtenir en second lieu les hyperboloïdes qui ont les bimédianes pour diamètres conjugués égaux, on peut faire les trois hypothèses :

$$-a = b = c, \quad a = -b = c, \quad a = b = -c,$$

d'où

$$\beta = \gamma = 2, \qquad \alpha = \gamma = 2, \qquad \alpha = \beta = 2,$$

ce qui fournit les trois équations :

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{P}{P'}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \\
&+ 2\left(\frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'} + \frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) + \varphi\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'}\right) = 0, \\
&\left(\frac{P}{P'}\right)^2 + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \left(\frac{S}{S'}\right) \\
&+ 2\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'} + \frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) + \psi\left(\frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'}\right) = 0, \\
&\left(\frac{P}{P'}\right) + \left(\frac{Q}{Q'}\right)^2 + \left(\frac{R}{R'}\right)^2 + \left(\frac{S}{S'}\right)^2 \\
&+ 2\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'} + \frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'}\right) + \chi\left(\frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

On constatera de même à l'aide de ces équations que *si un hyperboloïde a pour diamètres conjugués égaux les bimédianes d'un tétraèdre, il coupe ses faces suivant des hyperboles qui ont pour centres les sommets du tétraèdre et pour asymptotes les côtés de l'un des trois quadrilatères gauches que forment les arêtes.*

19. *Surfaces circonscrites et inscrites aux faces et aux arêtes qui ont les bimédianes pour diamètres conjugués.* — Reprenons l'équation (23) et cherchons à la faire coïncider avec le type (2) des surfaces circonscrites. Celle-ci ne renfermant pas de carrés, il faut remplacer α, β, γ par $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$, chasser ε, puis faire $\varepsilon = 0$. Il vient ainsi

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha\left(\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'}\right) + \beta\left(\frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'}\right) \\ &\qquad + \gamma\left(\frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation renferme encore deux arbitraires, et cependant nous avons imposé en tout dix conditions à la surface. Cela tient à ce que, *lorsqu'une surface est circonscrite à un tétraèdre et qu'elle a son centre au centre de gravité, elle a par cela même les bimédianes pour diamètres conjugués.*

20. En cherchant de même à faire coïncider la forme (23) avec celle (9) des surfaces inscrites aux faces, on est amené à poser

$$A_1^4 = A_2^3 = \lambda,$$
$$A_2^4 = A_1^3 = \mu,$$
$$A_3^4 = A_1^2 = \nu,$$

ce qui fournit l'équation

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda\mu\nu\left[\left(\frac{p}{p'}\right)^2+\left(\frac{q}{q'}\right)^2+\left(\frac{r}{r'}\right)^2+\left(\frac{s}{s'}\right)^2\right]\\ &+\lambda\,(\lambda^2-\mu^2-\nu^2)\left(\frac{pq}{p'q'}+\frac{rs}{r's'}\right)\\ &+\mu(-\lambda^2+\mu^2-\nu^2)\left(\frac{pr}{p'r'}+\frac{qs}{q's'}\right)\\ &+\nu(-\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\left(\frac{ps}{p's'}+\frac{qr}{q'r'}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation renferme encore deux arbitraires, quoique la surface ait été astreinte à dix conditions, ce qui tient à ce que, *lorsqu'une surface est inscrite entre les faces d'un tétraèdre et qu'elle a son centre au centre de gravité, elle a par cela même les bimédianes pour diamètres conjugués.*

21. Pour faire coïncider enfin le type (23) avec celui (11) des surfaces inscrites entre les arêtes, il faut faire $\alpha=\beta=\gamma=-2$:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\\ &-2\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

On remarquera que nous avons par le fait imposé à la surface douze conditions, ce qui tient à ce que, *lorsqu'une surface est inscrite entre les arêtes d'un tétraèdre et qu'elle a son centre au centre de gravité, elle a par cela même les bimédianes pour diamètres conjugués.*

On voit que cette surface est unique et bien déterminée, et que de plus elle rentre dans le type (24), ce qui permet d'ajouter que *cette surface est un ellipsoïde qui*

coupe les faces suivant des ellipses ayant pour centres les centres de gravité de ces faces.

22. *Surfaces circonscrites ou inscrites aux faces ou aux arêtes, ayant les bimédianes pour diamètres conjugués* ÉGAUX. — Occupons-nous d'abord des ellipsoïdes (24). Pour faire concorder ce type avec celui (2) des surfaces circonscrites, il faut opérer comme ci-dessus (19), ce qui donne

$$(29)\quad \left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.$$

Pour la surface inscrite aux faces (9), il faut faire $\lambda=\mu=\nu$, d'où

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\\ -\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.\end{array}\right.$$

Quant à la surface inscrite aux arêtes, nous venons de l'obtenir à l'instant même (28) :

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{P}{P'}\right)^2+\left(\frac{Q}{Q'}\right)^2+\left(\frac{R}{R'}\right)^2+\left(\frac{S}{S'}\right)^2\\ -2\left(\frac{PQ}{P'Q'}+\frac{RS}{R'S'}+\frac{PR}{P'R'}+\frac{QS}{Q'S'}+\frac{PS}{P'S'}+\frac{QR}{Q'R'}\right)=0.\end{array}\right.$$

23. Ces trois ellipsoïdes forment une série qui mérite d'être remarquée. Ils sont, comme nous l'avons dit, homothétiques et se distinguent par le rapport de similitude. Les dimensions seront pour chacun proportionnelles à [(22) et 16, note]

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{3\varpi+2}{\varpi-2}}.$$

Comme d'ailleurs ϖ prend les valeurs

$$\infty, \quad -2, \quad -1,$$

les rapports deviennent

$$\sqrt{3}, \quad 1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi donc *les axes des trois ellipsoïdes circonscrit, inscrit aux arêtes, et inscrit aux faces d'un tétraèdre, qui ont en outre les bimédianes pour diamètres conjugués égaux, forment une progression géométrique qui a pour raison* $\sqrt{3}$.

24. Si nous considérons maintenant les hyperboloïdes (25), nous devrons, pour les faire coïncider avec l'équation des surfaces circonscrites (2), qui ne renferme pas de carrés, remplacer φ, ψ, χ par $\frac{\varphi}{\rho}$, $\frac{\psi}{\rho}$, $\frac{\chi}{\rho}$, chasser ρ et faire $\rho = 0$, ce qui donne

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{PQ}{P'Q'} + \frac{RS}{R'S'} = 0, \\ &\frac{PR}{P'R'} + \frac{QS}{Q'S'} = 0, \\ &\frac{PS}{P'S'} + \frac{QR}{Q'R'} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces équations montrent qu'*il existe trois hyperboloïdes circonscrits à un tétraèdre et ayant les bimédianes pour diamètres conjugués égaux, qui passent par chacun des trois quadrilatères gauches du tétraèdre et qui par suite sont toujours à une nappe.*

Pour les surfaces inscrites aux faces, *nous obtiendrons précisément les mêmes résultats,* puisque chaque face coupant l'hyperboloïde suivant deux génératrices

lui est nécessairement tangente au sommet du quadrilatère gauche.

Quant aux surfaces inscrites entre les arêtes, nous avons vu qu'elles ne comportent qu'une solution unique (28) qui est ellipsoïdale, et d'ailleurs la forme de l'équation des hyperboloïdes (25) est incompatible avec le type général (11).

SUR LA COURBURE DE QUELQUES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE;

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI,
Professeur à l'Université de Pise.

Dans une Note insérée au tome III (2ᵉ série) du *Journal de M. Liouville,* M. de la Gournerie a fait des remarques importantes au sujet des sections déterminées dans une surface par ses plans tangents. Il a, entre autres choses, établi bien clairement que les deux branches de ces sections n'ont en général qu'un contact du premier ordre avec les lignes asymptotiques de la surface.

En cherchant à déterminer la courbure de ces sections, au point où leur plan est tangent à la surface, je suis parvenu au théorème suivant :

Le rayon de courbure d'une ligne asymptotique, sur une surface quelconque, est toujours les deux tiers de celui de la section faite à la surface par le plan tangent au point considéré.

(Il est sous-entendu que l'on considère la branche de cette section, tangente à la ligne asymptotique.)

Désignons par s l'arc de la ligne asymptotique, et par $\varphi = 0$ l'équation de la surface. La propriété caractéris-

tique de cette ligne est exprimée par l'équation

$$\text{(1)}\qquad \frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

ou, en prenant la dérivée par rapport à s de l'équation

$$\text{(2)}\qquad \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{ds}=0$$

(qui exprime que la ligne est tracée sur la surface), par cette autre équation

$$\text{(3)}\qquad d\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+d\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}+d\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}=0,$$

qui revient à celle dont se sert M. Dupin. Si l'on prend de nouveau la dérivée par rapport à s de cette dernière équation, on trouve, après quelques réductions,

$$\text{(4)}\qquad d\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+d\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+d\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{\Omega}{2ds^2}=0,$$

où Ω représente la somme des termes en $\frac{h^3}{6}$ dans le développement de

$$\varphi(x+hdx,\ y+hdy,\ z+hdz).$$

Les deux équations (2), (3), combinées avec la suivante,

$$\text{(5)}\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

déterminent, pour chaque point de la surface, les directions des deux branches asymptotiques qui s'y entrecoupent, de sorte qu'on peut les regarder comme connues. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ aient un des systèmes de valeurs fournis par (2), (3), (5).

Désignons par k un rapport à déterminer, et par h^2 la somme des carrés des trois dérivées partielles de la fonction φ : de l'équation (1) et de la suivante,

$$(6)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0,$$

on tire

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2}&=k\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{dz}{ds}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{dy}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{ds^2}&=k\left(\frac{d\varphi}{dz}\frac{dx}{ds}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{dz}{ds}\right),\\ \frac{d^2z}{ds^2}&=k\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dy}{ds}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{dx}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

En ajoutant les carrés des deux membres de ces trois équations, on obtient

$$k=\frac{\pm 1}{\rho h},$$

où ρ est le rayon de courbure. Remplaçant dans l'équation (4) les dérivées secondes des coordonnées par les valeurs (7), et posant, pour abréger,

$$\begin{vmatrix} d\frac{d\varphi}{dx} & d\frac{d\varphi}{dy} & d\frac{d\varphi}{dz}\\ \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\varphi}{dz}\\ dx & dy & dz \end{vmatrix}=\Delta,$$

on a cette valeur de ρ :

$$(8)\qquad \rho=\pm\frac{2\Delta\, ds}{h\Omega}.$$

On peut facilement transformer cette expression. Élevant le déterminant Δ au carré et tenant compte des formules précédentes, on trouve aisément

$$\Delta=\pm h\, ds\sqrt{\left(d\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(d\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(d\frac{d\varphi}{dz}\right)^2-dh^2},$$

ou bien

$$\Delta = \pm h^2 ds \sqrt{\left(d\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{h}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{h}\right)^2 + \left(d\frac{\frac{d\varphi}{dz}}{h}\right)^2}.$$

Si donc on appelle $d\psi$ la déviation de la normale à la surface le long de l'arc ds, on a simplement

$$\Delta = \pm h^2 ds\, d\psi, \quad \text{et par suite} \quad \rho = \pm \frac{2h\, ds^2\, d\psi}{\Omega}.$$

Cette dernière formule donne lieu à quelques remarques que nous ne croyons pas devoir passer sous silence quoique étrangères à notre sujet.

Lorsque $\varphi(x, y, z)$ est une fonction entière du second degré, ses dérivées troisièmes étant nulles, il en est de même de Ω. Par suite, les deux systèmes de lignes asymptotiques ont partout un rayon de courbure infini, et ne peuvent être par conséquent que des lignes droites. Nous retrouvons ainsi le théorème connu, que *chaque surface du second degré est le lieu géométrique de deux systèmes de lignes droites* (réelles ou imaginaires).

La tangente à une ligne asymptotique étant conjuguée à elle-même, il est évident que pour toute surface réglée une des séries de lignes asymptotiques est formée par les génératrices rectilignes de la surface. Il faut donc que la quantité Ω soit annulée par la substitution des valeurs de dx, dy, dz répondant à la direction d'une génératrice. Donc si l'on élimine dx, dy, dz entre les équations

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = 0,$$

$$d\frac{d\varphi}{dx} \cdot dx + d\frac{d\varphi}{dy} \cdot dy + d\frac{d\varphi}{dz} \cdot dz = 0,$$

$$\Omega = 0,$$

le résultat de cette élimination sera une équation aux dérivées partielles du premier, deuxième et troisième ordre de la fonction φ, qu'on devra regarder comme appartenant à toutes les surfaces qu'on peut concevoir engendrées par le mouvement d'une droite. Ce résultat s'accorde avec celui auquel Monge est parvenu d'une manière différente au § XXI de son grand ouvrage sur l'*Application de l'analyse à la Géométrie*.

Revenons à notre question. La ligne plane, intersection de la surface par le plan tangent au point (x, y, z) est représentée par le système des deux équations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \\ (\xi - x)\dfrac{d\varphi}{dx} + (\eta - y)\dfrac{d\varphi}{dy} + (\zeta - z)\dfrac{d\varphi}{dz} = 0, \end{cases}$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées courantes. Désignant par σ l'arc de cette courbe, on déduit de la première de ces deux équations, par trois dérivations successives,

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{d\xi}{d\sigma} + \dfrac{d\varphi}{d\eta}\dfrac{d\eta}{d\sigma} + \dfrac{d\varphi}{d\zeta}\dfrac{d\zeta}{d\sigma} = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \dfrac{d\varphi}{d\eta}\dfrac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \dfrac{d\varphi}{d\zeta}\dfrac{d^2\zeta}{d\sigma^2} \\ \qquad + \dfrac{d\frac{d\varphi}{d\xi}}{d\sigma}\dfrac{d\xi}{d\sigma} + \dfrac{d\frac{d\varphi}{d\eta}}{d\sigma}\dfrac{d\eta}{d\sigma} + \dfrac{d\frac{d\varphi}{d\zeta}}{d\sigma}\dfrac{d\zeta}{d\sigma} = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{d^3\xi}{d\sigma^3} + \dfrac{d\varphi}{d\eta}\dfrac{d^3\eta}{d\sigma^3} + \dfrac{d\varphi}{d\zeta}\dfrac{d^3\zeta}{d\sigma^3} \\ \qquad + 3\left(\dfrac{d\frac{d\varphi}{d\xi}}{d\sigma}\dfrac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \dfrac{d\frac{d\varphi}{d\eta}}{d\sigma}\dfrac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \dfrac{d\frac{d\varphi}{d\zeta}}{d\sigma}\dfrac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right) + \dfrac{\Omega'}{d\sigma^3} = 0, \end{cases}$$

où Ω' a une signification analogue à celle de Ω. La se-

conde des équations (9), où x, y, z entrent comme des constantes, donne de son côté

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\eta}{d\sigma}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\zeta}{d\sigma}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^3\xi}{d\sigma^3}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^3\eta}{d\sigma^3}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^3\zeta}{d\sigma^3}=0.$$

Si l'on pose, dans les équations (10), $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$, en tenant compte des trois dernières équations et en remarquant qu'au point considéré la section plane est tangente à la ligne asymptotique, on trouve : d'abord les équations (2), (3) ci-dessus, puis

$$(4') \quad d\frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+d\frac{d\varphi}{dy}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+d\frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)+\frac{\Omega}{3\,ds^2}=0,$$

où $\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)$, etc., représentent les valeurs que prennent les dérivées secondes $\frac{d^2\xi}{d\sigma^2},\dots,$ pour $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$. D'ailleurs, on a évidemment aussi

$$(1') \quad \frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+\frac{d\varphi}{dy}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+\frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)=0,$$

$$(6') \quad \frac{dx}{ds}\left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right)+\frac{dy}{ds}\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right)+\frac{dz}{ds}\left(\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right)=0;$$

donc si l'on opère sur les équations (1′), (6′) et (4′) de la même manière que l'on a opéré ci-devant sur les équations (1), (6), (4), et qu'on désigne par ρ' le rayon de courbure de la ligne plane, au point et sur la branche que l'on considère, on trouvera évidemment

$$(8') \quad \rho'=\pm\frac{3\Delta\,ds}{h\Omega},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{2}{3},$$

d'où résulte la propriété énoncée.

Les formules (8), (8') deviennent illusoires pour les surfaces développables, puisque $d\psi$ et Ω s'y annulent en même temps. Dans ces surfaces, les deux séries de lignes asymptotiques se réduisent à une seule : c'est le système des génératrices rectilignes, qui en sont en même temps des lignes de courbure. Le rayon ρ est donc en général infini. Cependant l'arête de rebroussement de la surface, ayant lui aussi ses normales dans le plan tangent à la surface, peut être regardé comme une ligne asymptotique *singulière*, dont le rayon de courbure n'est généralement ni nul ni infini. Le lieu des points communs à la surface développable et à un de ses plans tangents se compose évidemment de la génératrice de contact, qui joue le rôle d'une droite double, et d'une ligne courbe qui touche cette génératrice au même point que l'arête de rebroussement. On a donc, en ce point, une ligne asymptotique et une section plane tangente à la surface, dont les courbures ne peuvent pas être tirées des formules précédentes et qui doivent être déterminées directement.

Pour cet objet nous remarquerons d'abord que la courbe plane est, dans ce cas, le lieu du point d'intersection d'une tangente mobile de la ligne à double courbure, qui constitue l'arête de rebroussement de la surface développable, avec un des plans osculateurs de cette même ligne. Nous rapporterons donc l'arête de rebroussement aux trois axes des x, y, z formés respectivement par la tangente, la normale principale et l'axe du plan osculateur au point que l'on considère. D'après ce choix de coordonnées les points très-voisins de l'origine peuvent

être représentés par les formules suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} x = s - \dfrac{s^3}{3\rho_0^2} + \ldots, \\ y = \dfrac{s^2}{2\rho_0} + \left(\dfrac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\right)_0 \dfrac{s^3}{6} + \ldots, \\ z = \dfrac{s^3}{6r_0\rho_0} + \ldots \end{cases}$$

où s est l'arc compté de l'origine, dans le sens des x positives, ρ, r sont les rayons de première et deuxième courbure, et l'indice o marque ce qui se rapporte à l'origine. Ces formules s'obtiennent aisément en étendant aux lignes à double courbure le procédé exposé pour les courbes planes aux §§ 516, 517 de l'excellent *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand. La valeur de z résulte immédiatement aussi d'un théorème de M. Bonnet, démontré au § 608 du même ouvrage.

Désignons par ξ, η, ζ les coordonnées courantes de la tangente à la ligne s, et par λ la portion de cette tangente comprise entre le point de contact (x, y, z) et le point (ξ, η, ζ) : on aura

$$\xi = x + \lambda \frac{dx}{ds}, \quad \eta = y + \lambda \frac{dy}{ds}, \quad \zeta = z + \lambda \frac{dz}{ds}.$$

Remplaçant x, y, z par leurs valeurs (11), posant $\zeta = 0$, tirant la valeur de λ et la substituant dans les expressions de ξ, η, on trouvera

$$\xi_0 = \frac{2s}{3} + \ldots, \quad \eta_0 = \frac{s^2}{6\rho_0} + \ldots,$$

ξ_0, η_0 étant les coordonnées du point d'intersection de la tangente avec le plan xy. On aura donc, pour l'arc σ de

la courbe plane lieu des points (ξ_0, η_0),

$$\sigma = \frac{2s}{3} + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\xi_0 = \sigma + \ldots, \quad \eta_0 = \frac{3\sigma^2}{8\rho_0} + \ldots.$$

Or, en nommant ρ' le rayon de courbure de cette dernière courbe et appliquant à celle-ci les formules (11), on aurait

$$\xi_0 = \sigma + \ldots, \quad \eta_0 = \frac{\sigma^2}{2\rho'_0} + \ldots.$$

La comparaison de ces valeurs avec les précédentes donne

$$\frac{\rho_0}{\rho'_0} = \frac{3}{4}.$$

[La démonstration précédente aurait été rendue plus rigoureuse par l'introduction d'un terme en s^4, à coefficient indéterminé, dans les formules (11). J'ai omis cette précaution dans le désir d'abréger.]

Ainsi, *la tangente mobile d'une ligne à double courbure décrit sur un quelconque de ses plans osculateurs une courbe plane qui touche cette ligne au point d'osculation; le rayon de courbure de la ligne à double courbure est toujours, en ce point, les trois quarts du rayon de courbure de la courbe plane au même point.*

On sait que M. Mœbius a démontré que la tangente mobile d'une cubique gauche décrit sur chacun de ses plans osculateurs une ligne du deuxième degré. D'après le théorème qui précède, on voit que la détermination du rayon de courbure d'une cubique gauche est ramenée à celle du rayon de courbure d'une section conique.

Je termine en exprimant le désir que mes théorèmes puissent être vérifiés par des considérations géomé-

triques directes, ce qui ne pourra pas manquer d'avoir lieu, si quelqu'un des savants collaborateurs de ce journal veut bien s'en occuper.

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT,

PAR M. OSSIAN BONNET.

Extrait d'une Lettre adressée au Rédacteur.

Je vous adresse un résumé du travail que j'ai présenté à la Société Philomathique, le 21 novembre 1863 (*). Vous y verrez une solution *complète* du problème de la détermination du rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface en un point pour lequel le plan osculateur est tangent à la surface. Le théorème élégant démontré, dans la Note précédente, par M. Beltrami est un cas très-particulier du résultat général que j'avais obtenu.

Soit une courbe Ω tracée sur une surface à courbures opposées Σ, et qui a au point M, pour plan osculateur, le plan tangent à la surface Σ. Appelons ρ le rayon de courbure et c le rayon de torsion de la courbe Ω au point M; désignons par ρ_0 le rayon de courbure au point M de la ligne asymptotique tangente en ce point à la courbe Ω, par R et R_1 les rayons de courbure principaux de la surface; on aura

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{2\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)}{1 - \frac{\sqrt{-RR_1}}{c}}$$

(*) Le samedi précédent, M. de la Gournerie avait indiqué une propriété qui, sans conduire d'une manière explicite au rayon de courbure de la courbe à nœuds provenant de l'intersection d'une surface à courbures opposées par son plan tangent, permet cependant d'obtenir simplement ce rayon de courbure dans quelques cas particuliers. M. de la Gournerie a depuis publié cette propriété avec une application au tore dans la troisième Partie de son *Cours de Géométrie descriptive*.

ou

$$\rho = \rho_0\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-RR_1}}{c}\right).$$

Quand la courbe Ω est plane, on a $c = \infty$ et la formule devient

$$\rho = \frac{3}{2}\rho_0;$$

c'est le théorème démontré par M. Beltrami.

La formule (1) ramène la détermination du rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface en un point pour lequel le plan osculateur est tangent à la surface, à celle du rayon de courbure d'une ligne asymptotique. Voici la valeur que j'avais obtenue pour ce dernier rayon de courbure

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_0} = \frac{4(-RR_1)^{\frac{7}{8}}}{(R-R_1)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{d.\left(\frac{-R_1}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds_1} \pm \frac{d.\left(\frac{R}{-R_1^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds}\right].$$

R et R_1 représentent toujours les rayons de courbure principaux de la surface, les dérivées sont relatives à des déplacements effectués sur les sections principales; enfin, le double signe provient de ce que, en chaque point d'une surface, il passe deux lignes asymptotiques.

L'équation (2) conduit sur-le-champ à quelques conséquences importantes.

Supposons que Σ soit une surface du second degré : les lignes asymptotiques seront des droites, donc les deux valeurs de $\frac{1}{\rho_0}$ seront nulles, et l'on aura

$$\frac{d\left(\frac{-R_1}{R^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds_1} = 0, \qquad \frac{d\left(\frac{R}{-R_1^3}\right)^{\frac{1}{8}}}{ds} = 0.$$

Ainsi, dans une surface du second degré, tout le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure

principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal. Réciproquement, quand dans une surface, tout le long des différentes lignes de courbure, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal, on a, en tous les points,

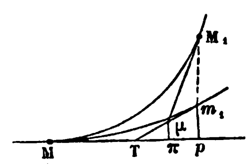
$$\frac{d\left(\frac{-R_1}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}}{ds_1} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{R}{-R_1^3}\right)^{\frac{1}{2}}}{ds} = 0;$$

les deux valeurs de $\frac{1}{\rho_0}$ sont nulles, donc les lignes asymptotiques sont des droites, et la surface est nécessairement du second degré.

J'ai démontré directement, dans le XXXII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, que lorsqu'on considère trois séries de surfaces orthogonales et isothermes sur une même surface et sur une même ligne de courbure, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal; donc une surface ne peut faire partie d'un système triplement isotherme et orthogonal sans être une surface du second degré. De là on conclut très-aisément le théorème de M. Lamé, d'après lequel le seul système de surfaces triplement isotherme et orthogonal est celui que forment les surfaces du second degré homofocales. On sait que ce théorème remarquable n'avait pu jusqu'ici être établi que par des considérations très-compliquées.

M. Beltrami, dans la Note intéressante qu'il vous a envoyée, démontre encore un théorème assez curieux sur le rayon de courbure de la section faite dans une surface développable par son plan tangent. Je connais ce

théorème depuis bien longtemps; je ne l'ai pas non plus publié, mais je l'ai énoncé à différentes personnes : à M. Mannheim, à M. de la Gournerie, etc. Voici par quelles considérations je l'avais obtenu : soit une courbe gauche et sa projection sur son plan osculateur en M. On



sait que ces deux courbes auront non-seulement la même tangente MT, mais encore la même courbure au point M. Prenons sur la courbe un point M_1 infiniment voisin de M, et sur la projection le point correspondant m_1; menons les tangentes en ces points, lesquelles se couperont en un point μ de la courbe considérée. La distance $M_1 m_1$ du point M_1 au plan osculateur en M est du troisième ordre en fonction de $MM_1 = s$, on peut donc la représenter par ms^3, m étant une constante, et alors l'angle $M\mu m_1$ est égal à $3ms^2$. Cela étant,

$$m_1\mu = \frac{1}{3}s = \frac{2}{3}m_1T,$$

car m_1T est la moitié de Mm_1 ou de s; par conséquent

$$T\mu = \frac{1}{3}Tm_1.$$

Abaissons maintenant $\mu\pi$ en m_1p, toutes les deux perpendiculaires sur MT : nous trouverons aisément

$$\mu\pi = \frac{1}{3}m_1p, \quad M\pi = \frac{1}{2}Mp + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}Mp = \frac{2}{3}Mp.$$

De là on conclut d'abord que $\mu\pi$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à $M\pi$, et par conséquent que MT est la

tangente en M à la courbe lieu des points μ; puis on a

$$\frac{\overline{M\pi}^2}{\mu\pi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\overline{M\nu}^2}{m_1 p},$$

ce qui prouve que le rayon de courbure en M de la courbe lieu des points μ est les $\frac{4}{3}$ du rayon de courbure de la courbe lieu des points m_1 ou de la courbe proposée.

C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE de deux théorèmes relatifs à la surface d'égale pente circonscrite à une conique;

PAR M. CREMONA.

Extrait d'une Lettre à M. de la Gournerie.

Bologne, 19 mai 1865.

Monsieur,

Dans votre excellent *Traité de Géométrie descriptive*, vous démontrez analytiquement deux beaux théorèmes relatifs aux coniques doubles de la surface d'égale pente dont la directrice est une conique. Un passage de votre *Lettre à M. Liouville* (*), en faisant allusion à ces théo-

---

(*) *Journal de Mathématiques*, décembre 1864.

On sait que la surface d'égale pente circonscrite à une conique a trois lignes doubles qui sont des coniques. L'une d'elles est la directrice; la détermination graphique des deux autres présentait quelque difficulté.

Le passage de ma Lettre à M. Liouville, que rappelle M. Cremona, est le suivant :

« ... Je trouve que les projections horizontales des deux lignes dou-

rèmes, m'a engagé à en rechercher la démonstration géométrique. C'est cette démonstration que je vous demande la permission de vous communiquer.

On donne deux coniques (A), (D) dans deux plans A, D : soient *d*, *a* les pôles de la droite AD par rapport aux coniques (A), (D) respectivement. Les plans tangents communs à ces coniques enveloppent une développable qui a deux coniques *doubles* autres que (A), (D). Les plans des quatre coniques forment un tétraèdre conjugué commun à toutes les surfaces du second ordre inscrites dans la développable. Il s'ensuit que si l'on détermine sur la droite AD les points *b*, *c* conjugués entre eux par rapport aux deux coniques (A), (D), les plans *adc*, *adb* contiendront les deux autres coniques doubles que nous nommerons (B), (C).

Imaginons maintenant dans le plan D une autre conique K ayant un double contact avec la conique (D); soient *e*, *f* les points de contact; *g* le point de concours des tangentes communes; soient a', b', c' les points où la corde de contact *ef* est rencontrée par les côtés *bc*, *ca*, *ab* du triangle *abc*, conjugué à (D). On sait que lorsque deux coniques ont un contact double, les polaires d'un même point quelconque concourent sur la corde de contact; donc *a* et a', *b* et b', *c* et c' sont des couples de points conjugués entre eux, non-seulement par rapport à la conique (D), mais aussi par rapport à la conique K.

Concevons qu'on mène par *ge* (et de même par *gf*)

---

bles cherchées et de la directrice sont des coniques homofocales, et que l'intersection des plans de deux d'entre elles est perpendiculaire au plan de la troisième. Il y a probablement quelque moyen facile de démontrer ces théorèmes par la Géométrie. »

Je suis heureux d'avoir, par cette phrase, provoqué les recherches d'un géomètre aussi distingué que M. Cremona. J. de la G.

deux plans tangents à la conique (A); ces plans touchent la conique (D), donc ils sont tangents aussi aux coniques (B), (C); c'est-à-dire que *ge*, *gf* sont les intersections de deux couples de plans tangents communs aux coniques (A), (B), (C). Ces plans couperont un plan mené arbitrairement par *ef* suivant quatre droites (dont deux se coupent en *e*, et les deux autres en *f*), et ces quatre droites seront tangentes aux sections des cônes *g*(A), *g*(B), *g*(C) par ce plan. C'est-à-dire que si l'on fait la perspective des coniques (A), (B), (C) sur un plan passant par *ef*, l'œil étant en *g*, on aura trois coniques inscrites dans un même quadrilatère dont deux sommets sont les points *e* et *f*.

Supposons maintenant que le plan D soit à une distance infinie, et considérons la conique (D) comme la section à l'infini d'un cône (D) de sommet *d*; alors *d* sera le centre commun des coniques (A), (B), (C); et les droites (*db*, *dc*), (*dc*, *da*), (*da*, *db*) seront des couples de diamètres conjugués des coniques (A), (B), (C) respectivement. D'où il suit qu'étant donnés la conique (A) et le cône (D), la droite *da* sera la conjuguée au plan A par rapport au cône, et les droites *db*, *dc* seront conjuguées entre elles par rapport au cône et par rapport à la conique (A), c'est-à-dire qu'elles seront les droites qui divisent harmoniquement l'angle des asymptotes de (A) et l'angle des génératrices du cône (D) comprises dans le plan A. Par conséquent, si (A) est une ellipse, les droites *db*, *dc* seront toujours réelles; mais si (A) est une hyperbole, elles peuvent être imaginaires.

Si des points où la conique (A) coupe le plan D on mène les tangentes à la conique (D), ces quatre tangentes sont des génératrices de la développable et se rencontrent en quatre points qui, étant des points doubles de la développable, appartiennent aux deux coniques (B),

(C). Si (A) est une ellipse, ces quatre tangentes sont imaginaires, mais donnent deux intersections réelles : donc l'une des coniques (B), (C) sera une hyperbole, et l'autre une ellipse.

Supposons que la conique K soit le cercle imaginaire à l'infini (section d'une sphère arbitraire par le plan à l'infini); le cône (D), dont la section à l'infini a un contact double avec K, devient un cône de révolution, dont l'axe est dg. Que cet axe soit vertical; les plans menés par ef seront horizontaux. Dans ces hypothèses la développable sera une *surface d'égale pente*.

Les points a et a' étant conjugués par rapport à K, il s'ensuit que les droites da, da' sont perpendiculaires; c'est-à-dire que les coniques doubles (A), (B), (C) ont cette propriété, que *l'intersection des plans de deux d'entre elles est perpendiculaire à la trace horizontale du plan de la troisième*. C'est l'un de vos théorèmes. Autrement, les trois plans A, B, C et un plan horizontal quelconque forment un tétraèdre dont les arêtes opposées sont orthogonales.

Les perspectives des coniques (A), (B), (C) sur un plan passant par ef, avec l'œil en g, deviennent des projections orthogonales sur un plan horizontal. Or ces projections sont inscrites dans un même quadrilatère (imaginaire) ayant deux sommets aux points circulaires à l'infini, e, f, donc *elles sont des coniques homofocales*. C'est l'autre de vos théorèmes.

J'ajoute que l'étude analytique de ces développables devient très-simple lorsqu'on fait usage des coordonnées planaires en rapportant les points de l'espace au tétraèdre formé par les plans des coniques doubles, comme tétraèdre fondamental, ainsi que je l'ai fait dans une autre occasion (*Annali di Matematica*, t. II, p. 65). Il est bien entendu que cette méthode ne peut être employée que dans le cas où le tétraèdre est réel.

Vous pouvez, Monsieur et cher collègue, faire de cette communication l'usage que vous voudrez; par exemple, vous pouvez la transmettre à M. Prouhet pour les *Nouvelles Annales*....

THÉORÈMES;

PAR M. PIGEON,
Élève de l'École Polytechnique.

I. Si, dans une hyperbole équilatère, on déplace d'une façon arbitraire un angle donné, la droite qui joint les milieux des cordes déterminées par la courbe sur les côtés de cet angle est vue du centre sous un angle constant.

II. Si les côtés d'un angle mobile glissent sur les sommets opposés d'un rectangle, fixe ou mobile, circonscrit à une ellipse, les droites qui joignent les pôles des côtés de cet angle respectivement aux sommets sur lesquels ils glissent font un angle constant.

Si le rectangle circonscrit est fixe et a ses sommets sur les axes de l'ellipse, on peut, au lieu de deux sommets opposés, prendre deux sommets consécutifs.

III. Deux coniques étant situées dans un même plan, il existe deux points tels, que si une transversale mobile pivote autour de l'un d'eux A, la droite qui joint les pôles de cette transversale par rapport aux deux coniques est vue du point considéré A sous un angle constant.

Les deux points en question ne changent pas quand les coniques pivotent autour de leurs centres.

IV. Si dans une surface réglée et fermée, à génératrice réelle ou imaginaire, on mène quatre plans parallèles et

équidistants, la différence des aires des sections moyennes est constamment égale au tiers de la différence des aires des sections extrêmes, quelles que soient l'orientation et la distance des plans sécants.

V. Si dans une surface réglée et fermée, à génératrice réelle ou imaginaire, on mène cinq plans parallèles et équidistants, on obtient ainsi quatre segments consécutifs tels, que la différence des segments moyens est constamment égale au tiers de la différence des segments extrêmes.

VI. Si de *m* points donnés arbitrairement dans l'espace on abaisse des perpendiculaires sur tous les côtés d'un polygone régulier, la somme des carrés de ces perpendiculaires reste constante : 1° quand le polygone pivote autour de son centre dans le cercle où il est inscrit; 2° quand le système des *m* points tourne autour de la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur le plan du polygone.

Dans ces conditions, la moyenne de ces carrés est en outre indépendante du nombre des côtés du polygone.

VII. Si de *m* points donnés arbitrairement dans l'espace on abaisse des perpendiculaires sur tous les côtés d'un polygone régulier, et qu'on projette ces perpendiculaires sur une droite arbitraire fixe, la somme de ces projections reste constante : 1° quand le polygone pivote autour de son centre dans le cercle où il est inscrit; 2° quel que soit le rayon de ce cercle; 3° de quelque façon que se déforme le système des *m* points, pourvu que son centre de gravité reste fixe.

Dans ces conditions, la moyenne arithmétique des projections est en outre indépendante et du nombre des côtés du polygone et du nombre des points d'où l'on abaisse les perpendiculaires.

VIII. Dans un polygone régulier de m côtés, la somme des carrés de toutes les droites, côtés et diagonales, qu'on peut mener entre deux sommets, est égale à m^2R^2, R étant le rayon du cercle circonscrit.

Si l'on projette le polygone sur un plan, cette somme devient $m^2\dfrac{a^2+b^2}{2}$, a et b étant les axes de l'ellipse projection du cercle circonscrit.

IX. Un prisme régulier indéfini tourne autour de son axe. Deux plans fixes arbitraires le coupent et y déterminent à chaque instant un tronc de prisme variable.

Toute fonction symétrique rationnelle et entière des arêtes latérales de ce tronc de prisme est constante, pourvu que le degré de cette fonction soit inférieur au nombre des arêtes.

REMARQUES
sur les compositions de Trigonométrie et de Mathématiques faites en 1864 pour l'admission à l'École Polytechnique.

Composition de Trigonométrie.

Cette épreuve a pour but de s'assurer que les candidats sont capables de se servir des Tables de logarithmes et de conduire à bien un calcul de quelque étendue. La nécessité du calcul numérique n'a pas besoin d'être démontrée, puisque c'est à cela que reviennent la plupart des applications. Il importe donc que les jeunes gens contractent de bonne heure l'habitude d'opérer sur les nombres et de le faire avec ordre et méthode. D'ailleurs, et cette raison ne sera pas celle qui touchera le moins les candidats, le

coefficient attaché à la composition trigonométrique, sans être très-considérable, ne laisse pas d'avoir une certaine influence sur le classement, et par conséquent peut décider de l'admission ou de la non-admission de ceux qui arrivent à la fin de la liste.

La composition de 1864 a été généralement assez bien faite : la moyenne était 14,47. Plus de quarante candidats ont obtenu la note 19 ou la note 20. La plupart des fautes commises ont été faites dans le calcul de

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

L'erreur s'apercevrait toujours et pourrait se corriger avant de passer à d'autres calculs, si l'on faisait la vérification

$$A+B+C=180^\circ.$$

Quelques élèves ont donné plus qu'on ne leur demandait, par exemple la surface du triangle, le rayon du cercle circonscrit. C'est un tort, le correcteur ne tenant aucun compte de ces calculs supplémentaires. Si l'on a du temps à la fin de la séance, il vaut beaucoup mieux l'employer à vérifier les résultats obtenus.

Composition de Mathématiques.

La question à résoudre était la suivante :

On donne le cercle représenté par l'équation

$$x^2+y^2=1$$

et la parabole représentée par l'équation

$$\beta^2x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = \frac{3\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2},$$

où α et β sont des paramètres positifs quelconques.

On propose de déterminer : 1° le nombre des points réels communs aux deux courbes pour les différentes valeurs de α et de β; 2° les coordonnées des quatre points communs lorsque

$$\alpha^2+\beta^2=1,$$

lorsque

$$\alpha=1 \quad \text{avec} \quad \beta>0,$$

lorsque

$$\beta=\sqrt{(\alpha^2-1)(4\alpha^2-1)}.$$

La méthode la plus simple pour résoudre cette question consiste à rapporter la parabole à son axe. On est ainsi ramené à déterminer l'intersection de deux courbes ayant un axe commun et la recherche des points inconnus n'offre plus aucune difficulté.

On pouvait encore employer la méthode dite de l'équation en λ, et c'est à elle qu'a eu recours la majorité des candidats. L'équation en λ est du troisième degré, l'une des racines est $-(\alpha^2+\beta^2)$ et les deux autres s'obtiennent par la résolution d'une équation du second degré. Le calcul peut donc être poussé jusqu'au bout.

Toute la difficulté consistait dans la discussion des résultats; généralement cette partie de la composition a été manquée. La plupart des élèves se sont bornés à dire ce qui arriverait si les racines de l'équation étaient réelles et inégales, égales, imaginaires, mais n'ont point dit pour quelles relations entre α et β ces circonstances devaient se présenter. La meilleure note a été 17 et trois ou quatre copies seulement l'ont méritée : la moyenne générale s'élevait de quelques dixièmes au-dessus de dix.

La discussion dépendant de deux indéterminées α et β, il était naturel de les considérer comme les coordonnées d'un point du plan. Les solutions multiples correspondent à la position de ce point sur certaines courbes faciles

à tracer. Ces courbes partagent le plan en diverses régions, qui correspondent à 0, à 2, à 4 solutions distinctes.

On a déjà signalé dans les comptes rendus des compositions de 1862 et de 1863 le peu d'habileté des élèves à discuter les problèmes. Il y a là une situation fâcheuse à laquelle il importe de remédier et nous la signalons aux professeurs. Un problème qui n'est pas discuté n'est pas un problème résolu : c'est comme un dessin aux contours indécis où l'œil ne distingue que des formes vagues. Il y a des méthodes rapides, précieuses à quelques égards, où l'infini est traité comme le fini, l'imaginaire comme le réel. La facilité qu'elles offrent dans certaines questions trompe les élèves. Ils s'imaginent que les formules n'ont plus d'exception, qu'il n'y a plus de cas particuliers à distinguer, par suite plus de discussion. C'est une erreur. Les exceptions, les cas particuliers n'existent pas moins, mais leur diversité est cachée sous l'uniformité d'un langage conventionnel. Il faut les dégager. Après avoir regardé de haut, il faut regarder de près.

QUESTIONS D'EXAMEN (1864).

NOTE DU RÉDACTEUR.

Nous croyons être agréable aux candidats en leur communiquant quelques questions choisies dont nous devons la connaissance à l'obligeance de quelques élèves et à une publication spéciale. Ceux qui désirent de plus amples détails peuvent consulter le *Bulletin des examens de l'École Polytechnique*, publié par M. Lonchampt, chef d'institution ; 38 pages lithographiées, prix 38 francs (*).

(*) Librairie Béchet, rue de la Sorbonne.

Nous ne prétendons pas donner ici une idée exacte des examens. En général, les examinateurs ne posent pas de problèmes. La plupart des questions qu'on va lire sont incidentes et amenées par une question principale empruntée au programme.

Nous appelons l'attention des élèves sur la partie élémentaire, dont la simplicité apparente pourrait les tromper. L'année dernière, beaucoup de candidats fort habiles dans l'art des transformations algébriques, et qui couvrent sans broncher tout un tableau de calculs, n'ont pas su se tirer de la démonstration de petits théorèmes de Géométrie élémentaire. L'art de démontrer est plus difficile en Géométrie qu'en Algèbre. En dire les raisons nous mènerait trop loin ; mais c'est un fait, et nous avertissons les candidats du péril auquel ils s'exposent en négligeant une partie qui demande un long exercice.

Arithmétique.

1. Fractions décimales périodiques.

2. Un nombre premier avec plusieurs autres est premier avec leur produit.

3. Racine cubique. Le premier chiffre s'obtient sans tâtonnement. Limite des essais à faire pour déterminer les autres chiffres.

4. Connaissant plus de la moitié des chiffres de la racine carrée d'un nombre entier, trouver les autres chiffres de cette racine par une division.

5. Erreur d'un produit, d'un quotient. Le nombre 35,847 est approché par excès à $\frac{1}{1000}$ près, et 4,36 approché par défaut à $\frac{1}{100}$ près : de quelle manière et avec

quelle approximation obtiendra-t-on le quotient du premier nombre par le second?

6. Multiplication abrégée, division abrégée.

7. Caractères de divisibilité d'un nombre par 12, par 15, par 7, par 17.

8. Condition pour qu'une fraction soit un carré parfait.

9. Avec quelle approximation faut-il calculer $\sqrt{A}$ pour avoir $\sqrt[4]{A}$ à une approximation donnée.

10. Extraire la racine carrée de $\frac{a}{b}$ à $\frac{1}{10^n}$ près.

11. Calculer $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ à une approximation donnée.

Géométrie.

12. Volume du segment sphérique.

13. Plus courte distance de deux points sur la surface de la sphère.

14. Les symétriques d'un polyèdre par rapport à deux plans de symétrie différents sont égaux.

15. Construire un triangle sphérique dans lequel on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un deux. — Problème analogue pour le trièdre.

16. Volume compris entre un triangle sphérique et les faces du trièdre correspondant ayant son sommet au centre de la sphère.

17. Peut-on former un triangle sphérique dont les trois angles soient égaux à 61 degrés?

18. Étant donné le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, trouver le côté du polygone semblable circonscrit au même cercle. — Question inverse.

19. Étant donnée une sphère, trouver son rayon.

20. Si deux triangles sphériques ont deux côtés respectivement égaux, comprenant des angles inégaux, au plus grand de ces deux angles sera opposé le plus grand côté.

21. Combien peut-on inscrire de décagones réguliers étoilés ?

22. Dans la théorie des polyèdres symétriques, que signifie l'expression : « disposition des faces en ordre inverse » ?

23. Mesure de l'angle dièdre. Pourquoi l'on emploie un angle plan dont les côtés sont perpendiculaires à l'arête.

24. Une droite qui fait des angles égaux avec trois droites situées dans un plan est perpendiculaire à ce plan.

25 et 26. Construire un triangle sphérique rectangle, connaissant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit; — connaissant un côté de l'angle droit et l'angle opposé. — Discussion.

27. Dans un triangle sphérique qui a un angle droit, les autres angles sont-ils nécessairement aigus ?

28. Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan.

Algèbre.

29. Un polynôme entier en x est une fonction continue de x.

30. Démontrer la formule

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

31. Satisfaire à l'inégalité

$$a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} > 0.$$

32. Nombre des termes du développement de

$$(a + b + c)^m.$$

33. Résoudre l'équation $x^{80} - 1 = 0$, en la ramenant à d'autres plus simples.

34. Coefficient de x^p dans les développements suivants:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^m)^2, \quad (1 + x + 2x^2 + \ldots + mx^m)^2.$$

35. Nombre des diviseurs du second degré d'un polynôme du $m^{ième}$ degré.

36. Résoudre l'équation $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

37. Décomposer en fraction simple

$$\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}, \quad \frac{3x-1}{(x+1)^2(x^2+1)^3}.$$

38. Méthode de Newton. Dans quel cas s'applique-t-elle à la limite inférieure, à la limite supérieure? Peut-elle s'appliquer indistinctement aux deux limites?

39. Formation du triangle arithmétique de Pascal.

40. Dérivée de $x^{\sin x}$.

41. Dérivée de $\arcsin x$. Pourquoi obtient-on deux valeurs?

Trigonométrie.

42. Résoudre un triangle, connaissant les angles et la surface.

43. Exprimer $\tang 3x$ en fonction de $\sin x$; résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré.

44. Vérification des Tables par le calcul des sinus et des cosinus des arcs de 9 degrés en 9 degrés.

45. Les quantités $\sin x + \frac{1}{x}$, $\sin x - \frac{1}{x}$ tendent-elles vers une limite quand x croît indéfiniment? — Leur rapport tend-il vers une limite.

46. Résoudre un triangle rectiligne, connaissant deux côtés et l'angle compris. Calcul direct du troisième côté.

47. Étant donné tang a, calculer cos $\frac{2}{3}a$.

48. Trouver tang ma en fonction de tang a.

49.

$$\sin(x+y).\sin(x-y) = (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y).$$

Géométrie descriptive.

50. Intersection d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical, par un cylindre droit dont la base est dans le plan horizontal.

51. Mener un plan tangent à une surface de révolution et parallèle à un plan donné.

52. Intersection d'un hyperboloïde et d'un cône, tous deux de révolution et dont les axes se rencontrent.

Géométrie analytique.

53. Conditions pour que l'équation générale du deuxième degré représente un cylindre parabolique.

54. Discuter les courbes

$$\rho = \sin^3\omega - \sin^5\omega, \quad \rho = \frac{4\omega}{4\omega+\pi}.$$

55. Diamètres conjugués égaux de l'ellipse. Angle de ces diamètres.

56. Discuter la courbe

$$(2x+3y)^2 = (4x+1)^2 + 4.$$

57. Lieu des points d'où l'on peut mener à trois sphères des tangentes proportionnelles aux rayons de ces sphères.

(*La suite prochainement.*)

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XIV.

NICOLAÏDÈS (Nicolas), sous-lieutenant de l'armée hellénique. — *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris.* (1° Mémoire sur la théorie générale des surfaces; 2° Théorie de la déformation des surfaces réglées déduite du mouvement d'un système invariable.) In-4 de 80 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1864.

Dans la première thèse (p. 3 à 45), l'auteur expose les principaux théorèmes sur les surfaces et il en fait d'intéressantes applications. Une formule nouvelle et remarquable par ses conséquences (p. 25) lie les courbures principales et leurs variations pour tout déplacement infiniment petit effectué sur une surface.

La seconde thèse rattache la théorie de la déformation des surfaces réglées aux propriétés de l'axe instantané dans les systèmes invariables, point de vue nouveau dont l'auteur tire un grand parti.

XV.

CAQUÉ (J.), agrégé, professeur au collége Rollin. — *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris.* (1° Méthode nouvelle pour l'intégration des équations différentielles linéaires ne contenant qu'une variable indépendante; 2° Propositions de mécanique données par la Faculté.)

De même que pour découvrir les propriétés d'une courbe on cherche les propriétés communes à des polygones qui tendent à se confondre avec elle; de même, pour découvrir les propriétés

d'une équation différentielle, on peut choisir une équation aux différences finies se confondant avec la proposée, lorsqu'on annule les différences des variables indépendantes, puis chercher les propriétés de cette équation qui sont indépendantes des grandeurs de ces différences. Ces considérations ont conduit M. Caqué à une méthode nouvelle dont il expose tous les détails dans les trois premiers chapitres. Dans le quatrième, il applique la méthode aux équations linéaires du premier ordre et aux équations linéaires à coefficients constants.

L'idée sur laquelle repose le travail de M. Caqué est juste et doit être féconde; mais sa thèse aurait gagné en intérêt s'il l'avait appliquée à des équations non encore traitées prr les analystes. Il y a longtemps que l'on sait intégrer les équations linéaires du premier ordre et les équations linéaires à coefficients constants. Il nous paraît difficile d'ajouter aux méthodes employées pour cet objet, où ne se trouvent d'autres difficultés que celles qui sont inhérentes à la résolution des équations algébriques. Les méthodes nouvelles doivent fournir des résultats nouveaux. C'est là leur pierre de touche.

XVI.

Laurent (Hermann). — *Thèse d'analyse sur la continuité des fonctions imaginaires et des séries en particulier*. In-4 de 16 pages. Metz, 1865.

L'auteur représente une fonction monogène et monodrome par une surface construite en élevant par chaque point (x, y) d'un plan une perpendiculaire z égale au module de la fonction. Il étudie ensuite les propriétés de deux sortes de courbes situées sur cette surface, savoir : les courbes d'égal module (ou courbes de niveau) et les courbes d'égal argument. Voici quelques résultats :

Les courbes d'égal module correspondant à des valeurs infiniment petites ou infiniment grandes du module de la fonction sont des cercles. — La lemniscate est la courbe d'égal module des fonctions entières du second degré. — Les courbes d'égal argu-

ment de la fonction sont les trajectoires orthogonales des courbes d'égal module. — Les courbes d'égal argument passent par les zéros et les infinis de $f(z)$. — Les courbes d'égal module des fonctions entières sont les lieux des points pour lesquels le produit de leurs distances à des points fixes est constant. — Un point ne peut passer d'un zéro (point racine) *de $f(z)$ à un autre zéro sans rencontrer en chemin une courbe d'égal module, le long de laquelle $f'(z)$ passe par zéro.*

Ce dernier théorème, donné comme une généralisation du théorème de Rolle, nous paraît incomplet dans son énoncé et manquer de précision. Pour rencontrer le point racine de la dérivée et non pas seulement une courbe sur laquelle se trouve ce point, il fallait aller du premier zéro au second, en suivant la projection d'une courbe dont l'argument est constamment nul. On a ainsi, en d'autres termes, le théorème donné par M. Liouville dans son journal (livraison de février 1864, p. 84 à 88).

En résumé, la thèse de M. Laurent offre beaucoup d'intérêt, et la Faculté de Nancy, en lui décernant le titre de Docteur ès Sciences, a récompensé un excellent travail.

XVII.

DURRANDE (H.), professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes. — *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris.* (1° Propriétés géométriques de la surface des ondes; 2° Détermination des coefficients des termes périodiques de la fonction perturbatrice.) In-4 de 88 pages. Moulins, 1864.

La première thèse est une monographie fort bien faite sur une surface un peu plus générale que la surface des ondes, et que notre savant collaborateur avait déjà étudiée dans les *Nouvelles Annales*. — La seconde thèse développe les méthodes de M. Liouville et de Cauchy. L'auteur indique ce qu'il doit à M. Hoüel, dont il a suivi le cours à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

P.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS RÉSOLUES PAR MOIVRE ET LEURS DÉRIVÉES

(voir page 209);

PAR M. S. REALIS.

---

4. Passons maintenant aux équations de degré pair, et posons

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + P_{2k} p^k x^{n-2k} + \ldots \mp 2p^{\frac{n}{2}} + q,$$

où le dernier terme sera

$$-2p^{\frac{n}{2}} + q \quad \text{ou} \quad +2p^{\frac{n}{2}} + q,$$

selon que $\frac{n}{2}$ sera un nombre impair ou un nombre pair.

Les n racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

seront encore données par la formule (3) (p. 213) en y mettant pour α une racine absolue quelconque de

$$\alpha^n - 1 = 0,$$

et faisant ensuite, successivement, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Remarquons avant tout que puisque α, étant racine absolue, ne satisfait pas à l'équation

$$\alpha^{\frac{n}{2}} - 1 = 0,$$

elle satisfera à l'équation

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{\frac{n}{2}} - 1} = 0;$$

par où l'on voit que l'on aura

$$\alpha^{\frac{n}{2}} + 1 = \alpha^{\frac{n}{2}-1} + \alpha^{n-1} = \alpha^{\frac{n}{2}-2} + \alpha^{n-2} = \ldots$$
$$= \alpha^2 + \alpha^{\frac{n}{2}+2} = \alpha + \alpha^{\frac{n}{2}+1} = 0,$$

et, par suite,

$$x_{\frac{n}{2}} + x_n = x_{\frac{n}{2}-1} + x_{n-1} = x_{\frac{n}{2}-2} + x_{n-2} = \ldots$$
$$= x_2 + x_{\frac{n}{2}+2} = x_1 + x_{\frac{n}{2}+1} = 0.$$

Les racines x sont donc distribuées par couples de valeurs égales deux à deux et de signes contraires; cela était indiqué d'avance par la forme même de l'équation qui ne contient que des puissances paires de l'inconnue, mais les formules qu'on vient d'écrire donnent le moyen d'assigner pour chaque racine celle qui lui est égale et de signe contraire dans la série des valeurs fournies par l'expression générale (3).

5. Ici il convient de distinguer deux cas, selon que n est un nombre impairement pair ou pairement pair.

Soit d'abord le premier cas, pour lequel le dernier terme de $f(x)$ est

$$-2p^{\frac{n}{2}} + q,$$

et supposons que l'on ait

$$-2p^{\frac{n}{2}} + q = 0;$$

d'où

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0.$$

Remontant aux formules du n° 1, et ayant égard à la

relation

$$\alpha^{\frac{n}{2}} + 1 = 0,$$

on voit aussitôt que les racines deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha\sqrt{-p} + \dfrac{p}{\alpha\sqrt{-p}} = (\alpha - \alpha^{n-1})\sqrt{-p} \\ \quad = \left(\alpha + \alpha^{\frac{n}{2}-1}\right)\sqrt{-p}, \\ x_2 = \left(\alpha + \alpha^{\frac{n}{2}-2}\right)\sqrt{-p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{\frac{n}{2}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = -\left(\alpha^{\frac{n}{2}-1} + \alpha\right)\sqrt{-p}, \\ x_n = 0, \end{cases}$$

et sont liées entre elles par les relations

$$x_1 = x_{\frac{n}{2}-1} = -x_{\frac{n}{2}+1} = -x_{n-1},$$

$$x_2 = x_{\frac{n}{2}-2} = -x_{\frac{n}{2}+2} = -x_{n-2},$$

$$x_3 = x_{\frac{n}{2}-3} = -x_{\frac{n}{2}+3} = -x_{n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{\frac{n}{2}} = x_n = 0.$$

Il y a donc deux racines nulles; les autres sont égales deux à deux, et à chaque couple de ces valeurs prises positivement il correspond un couple des mêmes valeurs prises négativement. Le polynôme $f(x)$ se réduit, par

conséquent, à un carré de la forme

$$x^2(x^2-x_1^2)^2(x^2-x_2^2)^2\ldots\left(x^2-x^2_{\frac{n-2}{4}}\right)^2,$$

x_1, $x_2,\ldots$, $x_{\frac{n-2}{4}}$ étant les $\frac{n-2}{4}$ premières expressions (4) ci-dessus.

Toutes ces racines sont réelles, car les sommes $\alpha+\alpha^{\frac{n}{2}-1}$, $\alpha^2+\alpha^{\frac{n}{2}-2},\ldots$ (égales respectivement aux différences $\alpha-\alpha^{n-1}$, $\alpha^2-\alpha^{n-2},\ldots$), sont toutes de la forme $R\sqrt{-1}$, et, multipliées par $\sqrt{-p}$, donnent un produit réel.

Les expressions (4) font voir que l'équation proposée est égale au carré de l'équation de degré sous-double considérée dans la remarque qui termine le n° 3 (où il faut remplacer par $\frac{n}{2}$ l'exposant qui y est indiqué par n, et faire attention que la quantité désignée par α n'est autre que celle désignée ici également par α, prise en signe contraire). Cela résulte aussi de ce qu'on a

$$y^n+\frac{p^n}{y^n}+2p^{\frac{n}{2}}=\left(y^{\frac{n}{2}}+\frac{p^{\frac{n}{2}}}{y^{\frac{n}{2}}}\right)^2,$$

ou, puisque $\frac{n}{2}$ est supposé impair,

$$x^n-npx^{n-2}+\ldots+\frac{n^2}{4}p^{\frac{n-2}{2}}x^2$$
$$=\left(x^{\frac{n}{2}}-\frac{n}{2}px^{\frac{n}{2}-2}+\ldots\mp\frac{n}{2}p^{\frac{n-2}{4}}x\right)^2.$$

Cela posé, égalons à zéro la dérivée de $f(x)$; nous aurons, en désignant par $\varphi(x)$ le premier membre de l'équation de degré $\frac{n}{2}$ qu'on vient de citer,

$$f'(x) = 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0.$$

Cette équation a d'abord en commun avec $f(x) = 0$ les $\frac{n}{2}$ racines qui satisfont à l'équation

$$\varphi(x) = 0,$$

savoir :

$$0, \quad \pm x_1, \quad \pm x_2, \ldots, \quad \pm x_{\frac{n-2}{4}};$$

les $\frac{n}{2} - 1$ autres racines, c'est-à-dire celles qui satisfont à

$$\varphi'(x) = 0,$$

seront, d'après ce qu'on vu au n° 3,

$$\pm \gamma_1 \sqrt{p}, \quad \pm \gamma_2 \sqrt{p}, \ldots, \quad \pm \gamma_{\frac{n-2}{4}} \sqrt{p};$$

les γ désignent ici les $\frac{n-2}{4}$ valeurs que prend la fonction $\gamma_k = \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k}$, pour k égal successivement à 1, 2, 3,..., $\frac{n-2}{4}$, en y mettant pour α une racine absolue quelconque de l'équation

$$\alpha^{\frac{n}{2}} - 1 = 0.$$

Désignons maintenant par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, les racines de $f'(x) = 0$ rangées par ordre de grandeur

croissante, en nous rappelant que l'on aura

$$a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2} = \ldots = a_{\frac{n}{2}} = 0.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans $f(x)$, il viendra, d'après les résultats du n° 3, et en faisant attention que chaque racine a doit, ou annuler $f(x)$, ou être comprise entre deux racines consécutives et distinctes de $f(x)$,

$$\left\{\begin{array}{l} f(a_1) = f(a_3) = \ldots = f\left(a_{\frac{n}{2}}\right) = \ldots = f(a_{n-1}) = 0, \\ f(a_2) = f(a_4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = f(a_{n-2}) = 4p^{\frac{n}{2}}. \end{array}\right.$$

On représente d'une manière abrégée ces relations importantes en écrivant

$$\left\{\begin{array}{l} f(a_{2k+1}) = 0, \\ f(a_{2k}) = 4p^{\frac{n}{2}}. \end{array}\right.$$

6. Si l'on avait

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

q étant négatif, le dernier terme de $f(x)$ serait $-4p^{\frac{n}{2}}$, et les valeurs de x auraient pour expressions

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = (\alpha + \alpha^{n-1})\sqrt{p}, \\ x_2 = (\alpha^2 + \alpha^{n-2})\sqrt{p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{\frac{n}{2}} = 2\alpha^{\frac{n}{2}}\sqrt{p}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_n = 2\sqrt{p}, \end{array}\right.$$

où $\sqrt{p}$ doit être pris partout avec le même signe, soit positif, soit négatif.

Ces racines se partagent en groupes d'après les relations

$$x_1 = x_{n-1} = -x_{\frac{n}{2}-1} = -x_{\frac{n}{2}+1},$$

$$x_2 = x_{n-2} = -x_{\frac{n}{2}-2} = -x_{\frac{n}{2}+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$x_{\frac{n}{2}} = -x_n,$$

à cause de

$$\alpha^{\frac{n}{2}} + 1 = 0.$$

Les racines a seraient d'ailleurs les mêmes que ci-dessus, et l'on aurait

$$\begin{cases} f(a_{2k-1}) = -4p^{\frac{n}{2}}, \\ f(a_{2k}) = 0. \end{cases}$$

Quand on n'a pas

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

les racines de l'équation

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + \frac{n^2}{4}p^{\frac{n-2}{2}}x^2 - 2p^{\frac{n}{2}} + q = 0$$

ne sont plus données par les expressions (4) ni par les expressions (5) ci-dessus, et il faut avoir recours en général aux valeurs fournies par la formule (3). Mais les quantités a ne changeront pas, et l'on trouvera facilement, comme dans le nº 3, les valeurs de $f(a_{2k+1})$ et de $f(a_{2k})$ qui conviendront aux différentes relations que l'on peut supposer entre p et q.

Il est à remarquer que lorsque $f(x) = 0$ a des racines réelles (au moins deux), ce qui a lieu quand

$$-2p^{\frac{n}{2}} + q < 0, \quad \text{ou} \quad -2p^{\frac{n}{2}} + q = -r^2,$$

elle se décompose immédiatement en deux autres de degré sous-double, à cause que l'on aura

$$f(x) = [\varphi(x) + r][\varphi(x) - r],$$

$\varphi(x)$ étant le même polynôme considéré précédemment. Les expressions tirées de la formule (3) se simplifient donc en ce cas, et les deux équations dans lesquelles la proposée se décompose rentrent dans celles dont il a été question plus haut, aux nos 2 et 3.

7. Il nous reste enfin à considérer les équations dont le degré est un nombre n pairement pair, c'est-à-dire multiple de 4. Soit donc, dans cette hypothèse,

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + P_{n-2}p^{\frac{n-2}{2}}x^2 + 2p^{\frac{n}{2}} + q,$$

et occupons-nous d'abord du cas où l'on aurait

$$2p^{\frac{n}{2}} + q = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

q étant négatif.

Désignons par α une racine absolue quelconque de

$$\alpha^n - 1 = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\alpha^{\frac{n}{2}} + 1 = 0,$$

et par suite

$$\alpha^{\frac{3n}{4}} + \alpha^{\frac{n}{4}} = 0,$$

et en général

$$\alpha^{\frac{n}{2}+k} + \alpha^k = 0.$$

Les racines de

$$f(x) = 0$$

seront encore données par

$$x_k = (\alpha^k + \alpha^{n-k})\sqrt{p},$$

en faisant $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, et le radical étant pris constamment avec le même signe.

On aura, en particulier,

$$x_{\frac{n}{4}} = \left(\alpha^{\frac{n}{4}} + \alpha^{\frac{3n}{4}}\right)\sqrt{p} = x_{\frac{3n}{4}} = 0,$$

$$x_n = 2\sqrt{p} = -x_{\frac{n}{2}},$$

et les autres racines seront liées entre elles, quatre par quatre, par les relations

$$x_1 = x_{n-1} = -x_{\frac{n}{2}-1} = -x_{\frac{n}{2}+1},$$

$$x_2 = x_{n-2} = -x_{\frac{n}{2}-2} = -x_{\frac{n}{2}+2},$$

$$x_3 = x_{n-3} = -x_{\frac{n}{2}-3} = -x_{\frac{n}{2}+3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le polynôme $f(x)$ se décompose donc comme il suit :

$$f(x) = x^2(x^2 - 4p)(x^2 - x_1^2)^2(x^2 - x_2^2)^2 \ldots \left(x^2 - x_{\frac{n-4}{4}}^2\right)^2$$

ou

$$f(x) = x^2(x^2 - 4p)(x^2 - \beta_1^2 p)^2(x^2 - \beta_2^2 p)^2 \ldots \left(x^2 - \beta_{\frac{n-4}{4}}^2 p\right)^2,$$

en posant

$$\alpha^k + \frac{1}{\alpha^k} = \beta_k.$$

L'égalité

$$y^n + \frac{p^n}{y^n} = \left(y^{\frac{n}{2}} + \frac{p^{\frac{n}{2}}}{y^{\frac{n}{2}}} \right)^2 - 2p^{\frac{n}{2}}$$

se traduit ici dans la relation

$$f(x) = \varphi(x)^2 - 4p^{\frac{n}{2}},$$

à cause de

$$2p^{\frac{n}{2}} + q = 0;$$

$\varphi(x)$ désigne le polynôme

$$x^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} p x^{\frac{n}{2}-2} + \ldots + \mathrm{P}_{2h} p^h x^{\frac{n}{2}-2h} + \ldots \mp 2p^{\frac{n}{4}}.$$

De cette relation on déduit, comme précédemment, l'abaissement des équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0$$

au moyen des équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = 0;$$

et l'on trouve ainsi

$$f(x) = \frac{1}{n^2} x^2 (x^2 - 4p) \left(\frac{\varphi'(x)}{x} \right)^2,$$

$$f'(x) = 2\varphi(x)\varphi'(x).$$

Soient maintenant $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ les racines de

$$f'(x) = 0$$

rangées par ordre de grandeur croissante, et effectuons la

substitution de ces valeurs dans $f'(x)$; nous obtiendrons, en abrégeant comme plus haut,

$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = -4p^{\frac{n}{2}}, \\ f(a_{2k}) = 0. \end{cases}$$

8. Si, le degré n étant toujours pairement pair, q est positif, et

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

la proposée devient

$$f(x) = x^n - npx^{n-2} + \ldots + \mathrm{P}_{n-2}p^{\frac{n-2}{2}}x^2 + 4p^{\frac{n}{2}} = 0.$$

Cette équation s'abaisse à l'aide de la relation

$$f(x) = \varphi(x)^2,$$

$\varphi(x)$ désignant le même polynôme que ci-dessus (n° 7); la dérivée sera d'ailleurs la même que précédemment, et les quantités a substituées dans $f(x)$ donneront les résultats

$$\begin{cases} f(a_{2k+1}) = 0, \\ f(a_{2k}) = 4p^{\frac{n}{2}}. \end{cases}$$

De ce qui précède on déduit, comme dans le n° 3, les valeurs que prennent $f(a_{2k+1})$ et $f(a_{2k})$, lorsque le dernier terme de $f(x)$ est une quantité quelconque différente de zéro et de $4p^{\frac{n}{2}}$.

9. Reportons-nous à présent aux équations générales (1) et (2) du n° 1, où n est un nombre entier et positif quelconque, et supposons que l'on ait

$$\frac{q^2}{4} - p^n < 0,$$

ce qui rend imaginaires les valeurs de y et réelles les valeurs de x.

En posant

$$\cos g = -\frac{q}{2\sqrt{p^n}}, \quad u = \frac{y}{\sqrt{p}},$$

où nous conviendrons de prendre les radicaux $\sqrt{p^n}$ et $\sqrt{p}$ avec le signe positif, et l'angle g dans l'étendue de la demi-circonférence, l'équation (1) peut être remplacée par

$$u^{2n} - 2u^n \cos g + 1 = 0.$$

La résolution de cette équation donne

$$u^n = \cos g \pm \sqrt{-1} \sin g,$$

et, par suite,

$$u = \cos\frac{2m\pi + g}{n} \pm \sqrt{-1} \sin\frac{2m\pi + g}{n},$$

formule dans laquelle, pour avoir toutes les valeurs de u, il faut faire successivement

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad n - 1.$$

L'équation (2), à cause de

$$x = y + \frac{p}{y} = \left(u + \frac{1}{u}\right)\sqrt{p},$$

en y faisant

$$\frac{x}{\sqrt{p}} = z,$$

se trouvera remplacée par l'une ou l'autre des deux équations suivantes :

$$z^n - nz^{n-2} + \ldots + P_{2k} z^{n-2k} + \ldots \mp 2 - 2\cos g = 0,$$
$$z^n - nz^{n-2} + \ldots + P_{2k} z^{n-2k} + \ldots \mp nz - 2\cos g = 0,$$

selon que n sera un nombre pair ou impair.

Les valeurs de z seront donc fournies, dans tous les cas, par la formule

$$z = u + \frac{1}{u} = 2\cos\frac{2m\pi + g}{n},$$

en y donnant à m les n valeurs ci-dessus; d'où l'on tirera les valeurs de x au moyen de la relation

$$x = z\sqrt{p}.$$

On voit donc que dans le cas irréductible, c'est-à-dire lorsque toutes les racines sont réelles, l'équation générale de Moivre du degré n se rapporte à la division d'un arc de cercle en n parties égales, et peut être résolue d'une manière très-simple avec le secours des Tables trigonométriques. Cette équation revient, en effet, à la relation connue entre le cosinus de l'arc g et celui de l'arc $\frac{g}{n}$, et les valeurs de u ci-dessus expriment que la formule

$$u^{2n} - 2u^n \cos g + 1$$

a pour diviseurs réels du second degré les n valeurs différentes comprises dans la formule

$$u^2 - 2u\cos\frac{2m\pi + g}{n} + 1;$$

c'est le théorème célèbre que Moivre a démontré dans ses *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*.

La résolution trigonométrique de l'équation en z, comme on sait, peut se tirer directement de la théorie des sections angulaires, sans la faire dépendre du théorème de Moivre. Ce théorème peut donc être établi, à son tour, d'une manière bien simple, en comparant les résultats de la résolution de l'équation en u considérée d'abord comme du second degré par rapport à u^n, et ensuite comme équation réciproque.

Si l'on supposait, en particulier, que l'on eût

$$g = 0, \quad \text{ou} \quad g = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad g = \pi.$$

l'équation (2) se rapporterait à la division de la circonférence en parties égales, selon le théorème de Cotes, et l'on tomberait sur les cas spéciaux dont il a été question dans les numéros précédents.

Quant à l'équation $f'(x) = 0$, elle est toujours résoluble trigonométriquement au moyen de la division de la circonférence en parties égales.

10. Si l'on construit sur deux axes restangulaires la courbe dont l'équation est

$$Y = f(x),$$

$f(x)$ étant le premier membre de l'équation (2), on reconnaît bientôt, d'après les résultats précédemment obtenus, la régularité remarquable de cette courbe dans les différents cas de n impair, ou impairement pair, ou pairement pair.

Il est visible que les circonstances que l'on a discutées relativement à la nature des racines de $f(x) = 0$ tiennent à la position de l'axe des x, lequel peut être déplacé parallèlement à lui-même, le paramètre p demeurant constant, de manière à donner lieu aux différentes relations entre p et q qui ont été examinées. Quant aux valeurs de Y correspondantes aux abscisses qui annulent $f'(x)$, elles font voir que les points *maximums* et *minimums* de la courbe sont déterminés par deux tangentes parallèles aux abscisses, et renfermant dans leur espacement toutes les ondulations qne fait la courbe. Par là on se rend compte, d'une manière sensible, des conditions énoncées au n° 1. relativement à la réalité ou non-réalité des racines.

Une discussion plus approfondie des courbes paraboliques dont il s'agit mettrait en lumière quelques autres particularités dignes de remarque qu'elles présentent, tenant à la théorie des sections angulaires; mais cela exige des considérations d'un genre différent de celles qui viennent d'être employées, et je ne crois pas devoir m'y arrêter ici.

SUR L'ELLIPSE DE SURFACE MAXIMUM

parmi toutes celles que l'on peut inscrire ou circonscrire à un quadrilatère donné;

PAR M. PAUL SERRET.

1. Si l'on désigne par ω_1, ω_2, ω_3 les inclinaisons, sur un axe quelconque ox, des normales aux côtés 1, 2, 3 d'un triangle; par a, b et ω les demi-axes d'une ellipse *conjuguée* au triangle et l'inclinaison de l'axe $2a$ sur ox; enfin par P_1, P_2, P_3 les distances du centre de l'ellipse aux côtés 1, 2, 3 du triangle conjugué : les dépendances existant entre le triangle et la courbe se traduisent par les trois relations

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(1)\quad (a^2+b^2)\cos(\omega_1-\omega_2)+(a^2-b^2)\cos(\omega_1+\omega_2-2\omega)=2P_1P_2,\\
&(2)\quad (a^2+b^2)\cos(\omega_2-\omega_3)+(a^2-b^2)\cos(\omega_2+\omega_3-2\omega)=2P_2P_3,\\
&(3)\quad (a^2+b^2)\cos(\omega_3-\omega_1)+(a^2-b^2)\cos(\omega_3+\omega_1-2\omega)=2P_3P_1,
\end{aligned}
\right.
$$

que l'on obtient, conformément à la méthode dont j'ai déjà donné diverses applications, en rapportant d'abord le triangle conjugué aux axes de la courbe, et transportant ensuite les relations obtenues à des axes quelconques.

2. Les équations (C) se prêtent aisément à la détermination de la somme a^2+b^2 des carrés des axes, par l'élimination simultanée des inconnues a^2-b^2 et ω.

On a, en effet, l'identité

$$(i)\quad \cos a.\sin(b-c)+\cos b.\sin(c-a)+\cos c.\sin(a-b)=0,$$

et si on l'applique aux trois angles

$$a=\omega_1+\omega_2-2\omega,\quad b=\omega_2+\omega_3-2\omega,\quad c=\omega_3+\omega_1-2\omega,$$

d'où

$$b-c=\omega_2-\omega_1,\quad c-a=\omega_3-\omega_2,\quad a-b=\omega_1-\omega_3,$$

on trouve, en ajoutant les équations (1), (2), (3), multipliées respectivement par $\sin(\omega_1-\omega_2)$, $\sin(\omega_2-\omega_3)$, $\sin(\omega_3-\omega_1)$,

$$(a^2+b^2)\sum\sin(\omega_1-\omega_2)\cos(\omega_1-\omega_2)=2\sum P_1P_2\sin(\omega_1-\omega_2).$$

le terme en (a^2-b^2) ayant disparu en vertu de l'identité (i).

Or, l'origine des coordonnées, ou l'origine des distances négatives P_1, P_2, P_3, étant supposée dans l'intérieur du triangle 1 2 3 ; les facteurs $\sin(\omega_1-\omega_2)$, $\sin(\omega_2-\omega_3)$,..., $\cos(\omega_1-\omega_2)$, $\cos(\omega_2-\omega_3)$,..., changés de signe, représentent les sinus et cosinus des angles mêmes A_3, A_1, A_2 du triangle; l'équation précédente peut donc s'écrire

$$(\text{I})\qquad (a^2+b^2)\sum\sin A_1\cos A_1=-2\sum P_1P_2\sin A_3:$$

et l'on reconnaît, dans le second membre, la fonction du cercle circonscrit au triangle; dans l'équation elle-même, l'expression analytique du théorème de M. Faure.

3. *Le rectangle a^2b^2 des carrés des axes peut aussi se déduire des équations* (C). Le calcul présente d'abord

une grande complication. Si l'on poursuit toutefois, il se simplifie singulièrement et se résout enfin en ce théorème.

Le rectangle, positif ou négatif, *des carrés des demi-axes d'une conique est égal et de signe contraire au produit* ($\gtrless 0$) *des distances du centre de la courbe aux côtés d'un triangle* conjugué *quelconque, multiplié par le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle :*

$$\text{(II)} \qquad a^2 . b^2 = -2R . P_1 P_2 P_3,$$

les distances P_1, P_2, P_3 étant d'ailleurs toutes les trois négatives pour un point situé à l'intérieur du triangle.

4. La relation (II) étant donnée, il est facile, abstraction faite des signes, de l'établir par la Géométrie.

Soient, en effet, O (*) le centre de la courbe; a_1, a_2, a_3 et S les côtés et l'aire du triangle conjugué $A_1 A_2 A_3$. Si l'on remplace $2R$ par $\frac{a_1 . a_2 . a_3}{2S}$, la formule (II) pourra s'écrire

$$\frac{a_1 P_1 . a_2 P_2 . a_3 P_3}{2S} = a^2 b^2,$$

ou encore

$$2 OA_1 A_2 . 2 OA_1 A_3 . \frac{OA_2 A_3}{A_1 A_2 A_3} = a^2 b^2;$$

ou enfin

$$\text{(II')} \qquad \sin^2\theta . \overline{OA_1}^2 . pA_2 . pA_3 . \frac{Op}{A_1 p} = a^2 b^2 :$$

en appelant p la trace du côté $A_2 A_3$ sur le diamètre OA_1, et θ l'inclinaison de ce côté sur ce diamètre. Or, si, rapportant la courbe aux diamètres conjugués OA_1, ou Ox, et Oy parallèle à $A_2 A_3$; on désigne par a_1, b_1 les demi-diamètres correspondants; par x l'abscisse Op, on trouve

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

successivement

$$OA_1 = \frac{a_1^2}{x},$$

ou

$$\overline{OA_1}^2 = \frac{a_1^4}{x^2},$$

$$pA_2 . pA_3 = \overline{pm}^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2),$$

$$\frac{Op}{A_1 p} = \frac{x}{\frac{a_1^2}{x} - x} = \frac{x^2}{a_1^2 - x^2};$$

et ces valeurs étant substituées dans la relation (II′), elle se réduit effectivement à une identité :

$$\frac{a_1^4}{x} \cdot \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2) \cdot \frac{x^2}{a_1^2 - x^2} \cdot \sin^2\theta = a^2 b^2$$

ou

$$a_1^2 b_1^2 . \sin^2\theta = a^2 b^2 \; (*).$$

5. *Définir l'ellipse de surface maximum parmi toutes celles que l'on peut inscrire à un quadrilatère donné.* (*Voir*, pour une solution antérieure de ce problème, Steiner-Terquem, *Nouvelles Annales*, 1845.)

Une conique étant inscrite à un quadrilatère, on sait que le *triangle* $A_1 A_2 A_3$, ayant pour côtés les trois diagonales du quadrilatère, est *conjugué* par rapport à la courbe : le rectangle des carrés des axes de celle-ci étant dès lors proportionnel au produit des distances de son centre aux côtés de ce triangle et devenant maximum, ou minimum, en même temps que ce produit. D'ailleurs, le lieu des centres des coniques inscrites n'est autre, comme

(*) Une seconde démonstration géométrique s'applique d'elle-même au cas du tétraèdre, et se traduit alors par la formule

$$a^2 . b^2 . c^2 = k . P_1 P_2 P_3 P_4,$$

où k désigne une grandeur géométrique ne dépendant que du tétraèdre donné.

on sait, que la droite des milieux des diagonales du quadrilatère. Si donc on appelle a_1, a_2, a_3 les traces de cette droite sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$; O le centre de l'une des courbes que l'on cherche, le point O devra satisfaire à la condition

$$Oa_1 . Oa_2 . Oa_3 = \text{maximum}.$$

De là, et par une notation suffisamment claire par elle-même,

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = \text{maximum},$$

d'où enfin

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \frac{1}{x - a_3} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{Oa_1} + \frac{1}{Oa_2} + \frac{1}{Oa_3} = 0:$$

équation du second degré dont les racines, toujours réelles, sont séparées par les nombres a_1, a_2, a_3. Deux coniques répondent donc toujours à la question proposée, à savoir : une ellipse dont le centre est compris entre les points milieux a_1, a_2 des premières diagonales, et dont la surface est maximum; une hyperbole dont le rectangle des axes est aussi maximum et dont le centre tombe entre les points milieux a_2, a_3 de la seconde et de la troisième diagonale.

On retrouve ainsi la solution déjà mentionnée de Steiner, mais par une méthode différente, plus simple aussi et qui se prête encore au problème suivant, dont la construction définitive dépend d'ailleurs d'une équation du troisième degré.

6. *Définir l'ellipse de surface maximum parmi toutes celles que l'on peut circonscrire à un quadrilatère donné.*

Une conique étant circonscrite à un quadrilatère, on sait que le *triangle* ABC, ayant pour sommets les trois points de concours des diagonales et des côtés opposés du

quadrilatère, est *conjugué* relativement à la courbe : le rectangle des carrés des axes de celle-ci étant dès lors proportionnel au produit des distances de son centre aux côtés de ce triangle, et devenant maximum, ou minimum, en même temps que ce produit. D'ailleurs, le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère est une courbe du second ordre, circonscrite, comme on sait, au même triangle ABC.

Si l'on désigne dès lors par a, b, c et S les longueurs des côtés et l'aire de ce triangle ; par

$$o = A = B = C$$

les équations de ses côtés, mises sous la forme

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = o;$$

par

$$\alpha.BC + \beta.CA + \gamma.AB = o$$

l'équation de la courbe lieu des centres : les coordonnées du centre de la courbe que l'on cherche seront les valeurs de A, B, C satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(1) \qquad a.A + b.B + c.C = -2S = \text{const.},$$

$$(2) \qquad \alpha.BC + \beta.CA + \gamma.AB = o \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = o,$$

$$(3) \qquad A.B.C = \text{maximum}.$$

Or, le centre se mouvant sur une courbe déterminée (2), les coordonnées A, B, C du centre sont des fonctions déterminées d'une même variable, de l'abscisse x du centre, par exemple. On posera donc, en appelant A', B', C' les dérivées de ces fonctions, prises par rapport à x,

$$(1') \qquad a.A' + b.B' + c.C' = o,$$

$$(2') \qquad \frac{\alpha}{A^2}\cdot A' + \frac{\beta}{B^2}\cdot B' + \frac{\gamma}{C^2}\cdot C' = o,$$

$$(3') \qquad \frac{1}{A}\cdot A' + \frac{1}{B}\cdot B' + \frac{1}{C}\cdot C' = o.$$

De là, par l'élimination des dérivées,

$$a\left(\frac{\beta}{B^2C}-\frac{\gamma}{C^2B}\right)+b\left(\frac{\gamma}{C^2A}-\frac{\alpha}{A^2C}\right)+c\left(\frac{\alpha}{A^2B}-\frac{\beta}{B^2A}\right)=0;$$

ou, en multipliant par $A^2B^2C^2$ et divisant par $\alpha\beta\gamma$,

$$(2'')\quad \frac{a}{\alpha}\cdot A^2\left(\frac{B}{\beta}-\frac{C}{\gamma}\right)+\frac{b}{\beta}B^2\left(\frac{C}{\gamma}-\frac{A}{\alpha}\right)+\frac{c}{\gamma}C^2\left(\frac{A}{\alpha}-\frac{B}{\beta}\right)=0:$$

équation d'une courbe du troisième ordre dont les traces sur la courbe des centres (2) déterminent les points cherchés. Or les courbes (2) et (2″) sont, l'une et l'autre, circonscrites au triangle de référence ABC dont les sommets sont, dès lors, trois des six points communs aux deux courbes, et représentent les centres des trois systèmes de deux droites que l'on peut circonscrire au quadrilatère donné, ou les centres des coniques circonscrites pour lesquelles le rectangle des axes est nul. Laissant donc de côté ces trois premiers points, les trois autres points communs aux deux courbes fourniront seuls la véritable solution du problème. Or il est aisé de voir que ces trois derniers points sont toujours réels ; deux de ces points, si le quadrilatère proposé est convexe, définissant les centres de deux hyperboles circonscrites dont le rectangle des axes est *maximum ;* le troisième servant de centre à une ellipse circonscrite d'aire minimum.

7. L'ellipse (a, b) se transformant, sous les conditions ordinaires, en une parabole de paramètres $2p$; il est facile de voir que la formule (II) se transforme en même temps en celle-ci :

$$\text{(III)}\qquad p=-2R.\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3;$$

α_1, α_2, α_3 désignant les cosinus des inclinaisons, sur l'axe de la parabole, des normales aux côtés 1, 2, 3 d'un *triangle conjugué* quelconque. D'ailleurs, suivant une

remarque faite d'abord, ce me semble, par M. Mention, le triangle ayant pour sommets les points milieux des côtés d'un triangle conjugué à la parabole est de lui-même circonscrit à la courbe; et réciproquement.... De là, en remarquant que les rayons des cercles circonscrits au premier et au second triangle sont dans le rapport de 2 à 1,

(IV) $$p = -4\text{R}.\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\alpha_3,$$

ou

(IV') $$p^2\text{R} = 2\text{P}_1\text{P}_2\text{P}_3:$$

formule que l'on peut vérifier directement et qui donne le demi-paramètre p d'une parabole inscrite à un triangle en fonction des distances P_1, P_2, P_3 du foyer aux trois côtés du triangle et du rayon R du cercle circonscrit.

8. On déduit sans peine de la formule (IV') la solution du problème suivant, proposé par Steiner : *Trouver la parabole de paramètre maximum parmi toutes celles que l'on peut inscrire à un triangle donné.*

Conservant, en effet, toutes les notations du n° 6, les coordonnées (A, B, C) du foyer de la parabole que l'on cherche devront satisfaire aux conditions suivantes :

(1) $$a\text{A} + b\text{B} + c\text{C} = -2\text{S} = \text{const.},$$

(2) $$\frac{a}{\text{A}} + \frac{b}{\text{B}} + \frac{c}{\text{C}} = 0,$$

(3) $$\text{A}.\text{B}.\text{C} = \text{maximum}.$$

On en déduit

(1') $$a\text{A}' + b\text{B}' + c\text{C}' = 0,$$

(2') $$\frac{a}{\text{A}^2}.\text{A}' + \frac{b}{\text{B}^2}.\text{B}' + \frac{c}{\text{C}^2}.\text{C}' = 0,$$

(3') $$\frac{1}{\text{A}}.\text{A}' + \frac{1}{\text{B}}.\text{B}' + \frac{1}{\text{C}}.\text{C}' = 0;$$

d'où, par l'élimination des dérivées,

$$(2'') \quad \frac{A}{a}(B^2 - C^2) + \frac{B}{b}(C^2 - A^2) + \frac{C}{c}(A^2 - B^2) = 0:$$

équation d'une courbe de troisième ordre, circonscrite au triangle des axes ABC, et dont les traces, sur le cercle circonscrit (2), sont les foyers des paraboles cherchées. Ces six traces, d'ailleurs, sont toujours réelles; et les sommets du triangle des axes étant laissés de côté, les trois derniers points, communs au cercle (2) et à la courbe (2''), sont les foyers de trois paraboles de paramètre maximum qui répondent à la question.

9. Le cas de la *parabole de paramètre maximum, circonscrite à un triangle donné,* se traiterait de même à l'aide d'une formule connue, toute semblable à la formule (IV).

NOTE SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. PAUL SERRET.

1. On connaît ce théorème : *Si une droite est asymptote d'une branche de courbe algébrique, elle l'est également d'une seconde branche* (NEWTON). Les lecteurs des *Nouvelles Annales* peuvent connaître aussi la démonstration qu'en a donnée M. A. Serret (1847, p. 217). A l'aide d'une courbe auxiliaire, l'auteur ramène le théorème à cet autre : *Une courbe algébrique ne peut avoir de point d'arrêt.* Réduction évidente d'ailleurs, *à priori*; les deux théorèmes n'en faisant qu'un, ainsi qu'on le voit par la perspective. Car si une courbe algébrique pouvait offrir un point d'arrêt : la projection de cette courbe, faite de manière à emporter ce point à l'infini, serait algé-

brique, comme la proposée, et présenterait une seule branche asymptote de la droite suivant laquelle se projette la tangente au point d'arrêt. Réciproquement, s'il pouvait exister dans le plan d'une telle courbe une droite asymptote d'une branche unique : la trace, sur un plan de projection quelconque, d'une parallèle à l'asymptote menée par le point de vue, serait un point d'arrêt de la courbe projetée.

2. Il reste à établir ce second théorème : *Une courbe algébrique ne peut avoir de point d'arrêt*; et c'est ce que l'on peut faire comme il suit.

Soit OA une branche de courbe faisant partie d'une ligne algébrique du degré m, et présentant un point d'arrêt à l'origine O.

Si autour du point O comme centre, avec un rayon quelconque, nous décrivons un cercle ; nous pourrons déduire, des équations

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$(2) \qquad f(x, y) = 0$$

du cercle et de la courbe, une combinaison homogène du degré $2m$

$$(3) \qquad \varphi_{2m}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

représentant le système des droites menées de l'origine à chacun des $2m$ points, réels ou imaginaires, communs au cercle et à la courbe. D'ailleurs, si le rayon du cercle (1) est suffisamment petit, et si l'origine O pouvait être un point d'arrêt de la courbe (2) ; le cercle et la courbe auraient un seul point réel commun : et l'équation (3) elle-même, de *degré pair* en $\frac{y}{x}$, admettrait une seule racine réelle ; ce qui serait absurde.

3. Des considérations semblables s'appliqueraient au théorème suivant : *Une courbe algébrique ne peut avoir de point anguleux;* mais on peut aussi l'établir de cette manière.

Un point anguleux peut être considéré comme résultant de la réunion de deux points d'arrêt en un seul, les tangentes relatives à ces points demeurant distinctes après leur réunion. Or, si une courbe algébrique pouvait offrir un tel point : la projection de cette courbe, faite de manière à emporter ce point à l'infini, présenterait deux droites (les projections des deux tangentes relatives au point anguleux) asymptotes, l'une et l'autre, d'une seule branche de courbe. Donc, etc.

CONSTRUCTION
des points de contact d'un cercle tangent à trois cercles donnés;

PAR M. E. BARBIER.

Propositions préliminaires.

1. Le point de contact de deux cercles tangents est leur centre d'homothétie; réciproquement, si le centre d'homothétie de deux circonférences appartient à l'une d'elles, on peut affirmer que les deux circonférences se touchent au centre d'homothétie.

2. Si deux triangles sont homothétiques et ont un sommet commun, les circonférences circonscrites à ces triangles se touchent au sommet commun; réciproquement, si deux circonférences sont tangentes, leur point de contact est le sommet commun et le centre d'homothétie de deux triangles inscrits respectivement dans chaque circonférence.

3. Si une circonférence O est à la fois tangente à trois circonférences O_1, O_2 et O_3 respectivement aux points P_1, P_2 et P_3, chacun de ces points est le centre d'homothétie du triangle $P_1 P_2 P_3$ et d'un triangle inscrit dans la circonférence O_1, ou O_2, ou O_3. Réciproquement, si un triangle T a un sommet commun avec chacun des trois triangles T_1, T_2 et T_3, s'il est de plus homothétique à chacun d'eux, la circonférence circonscrite au triangle T est à la fois tangente aux cercles circonscrits aux triangles T_1, T_2 et T_3.

4. Les côtés du triangle T coupent en C_1, C_2 et C_3 un axe de similitude des circonférences O_1, O_2 et O_3. Ces points C_1, C_2 et C_3 sont des centres d'homothétie des circonférences prises deux à deux et des triangles pris deux à deux.

5. Soient R_1, R_2 et R_3 les rayons des circonférences O_1, O_2 et O_3; soient aussi G_1, G_2 et G_3 trois points de l'axe de similitude $C_1 C_2 C_3$ déterminés ainsi qu'il suit: G_1 par l'une des deux proportions

$$\frac{G_1C_2}{C_1C_2}=\frac{R_1}{R_3} \quad \text{et} \quad \frac{G_1C_3}{C_1C_3}=\frac{R_1}{R_2},$$

et G_2 et G_3 par des proportions analogues; les côtés du triangle T_1 passent par les points G_1, C_2 et C_3; ceux du triangle T_2 par les points C_1, G_2 et C_3; enfin ceux du triangle T_3, par les points C_1, C_2 et G_3.

De ces propositions préliminaires il résulte que le problème de *trouver une circonférence* O *à la fois tangente aux trois circonférences données* O_1, O_2 *et* O_3 revient à cet autre problème : *Trouver un triangle* T_1 *inscrit dans le cercle* O_1 *et dont les côtés passent par les points* G_1, C_2 *et* C_3 qui sont faciles à déterminer.

Le point de contact des circonférences O et O_1 est le

sommet de T_1 opposé au côté qui passe par le point G_1 ; on déterminerait de même les points de contact de O et de O_2, ou de O et O_3.

Théorème. — *Si les quatre côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle donné passent par quatre points en ligne droite, une infinité de quadrilatères peuvent être inscrits dans le même cercle, de manière que leurs quatre côtés passent par ces quatre mêmes points.*

On pourrait exprimer le même fait en disant que le quadrilatère inscrit peut pivoter autour de quatre points en ligne droite.

Ce théorème donne une solution simple du problème suivant : *Inscrire dans un cercle* O_1 *un triangle* T_1 *dont les côtés passent par les trois points en ligne droite* G_1, C_2 *et* C_3.

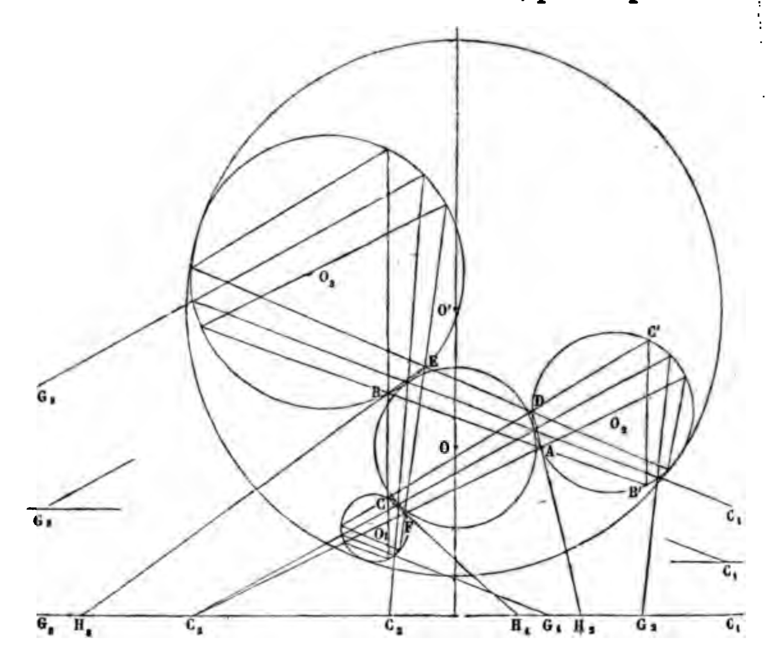
Par les extrémités d'une corde dirigée sur G_1, mener deux cordes dirigées, l'une sur C_2, l'autre sur C_3. En général ces trois cordes ne feront pas une ligne fermée ; on la fermera par une droite qui complète un quadrilatère inscrit et qui coupe la droite $G_1C_2C_3$ en un point H_1. Il suffit de mener du point H_1 une tangente au cercle O_1 pour avoir au point de contact l'élément auquel se réduira un côté du quadrilatère inscrit dégénéré dans le triangle demandé après avoir pivoté autour des points G_1, H_1, C_2 et C_3.

On peut donc par ce moyen déterminer chacun des points de contact d'une circonférence O tangente aux trois cercles O_1, O_2 et O_3.

Mais les constructions peuvent être un peu modifiées de manière à donner à la fois les trois points de contact et à rendre inutile la détermination des points G_1, G_2 et G_3.

Construction des points de contact d'un cercle O *tangent à trois cercles donnés* O_1, O_2 et O_3.

Considérons un axe de similitude $C_1C_2C_3$ des trois cercles : entre les circonférences O_2 et O_3, par un point A



pris à volonté sur O_2, menons une droite AB dirigée sur C_1 et non terminée par des points homologues ; menons d'une manière analogue BC et CD.

Le point D auquel on arrive est le même que celui auquel on serait arrivé en inscrivant dans la circonférence O_2 un quadrilatère AB'C'D dont les trois premiers côtés passent par C_1, G_2 et C_3.

De cette proposition facile à démontrer il résulte que la droite AD passe par le point H_2. Donc si l'on mène DE

dirigée sur C_1, la droite BE passera par le point H_2; enfin menant EF dirigée sur C_2, on aura une droite CF qui passe par le point H_1.

Les points H_1, H_2 et H_3 étant déterminés, les tangentes menées de ces points respectivement aux trois cercles donnés détermineront les points de contact de deux circonférences O et O' tangentes aux trois cercles.

Remarques. — I. Nous avons cherché DAH_2 en commençant les constructions au point A; nous aurions pu tout aussi bien les commencer au point D: cette construction devrait donc aboutir au point A.

On voit donc que les côtés opposés de l'hexagone ABCDEF concourent en trois points en ligne droite C_1, C_2 et C_3.

II. La construction que nous avons faite du quadrilatère AB'C'D étant répétée à partir de tous les sommets de l'hexagone ABCDEF, on aura inscrit dans les trois cercles O_1, O_2 et O_3 des hexagones homothétiques. Cette proposition est facile à démontrer.

III. Le quadrilatère ABCD est inscriptible dans un cercle; en effet, les angles CDA et CBA interceptant des arcs homothétiques dans les circonférences O_2 et O_3 sont égaux et par suite inscriptibles dans un même segment de cercle.

Cette proposition s'appliquant à quatre sommets consécutifs de l'hexagone ABCDEF, il en résulte que *cet hexagone est inscriptible dans un cercle* ω.

IV. La puissance du point H_1 par rapport au cercle circonscrit à l'hexagone ABCDEF est $H_1E \times H_1C$; elle est égale à la puissance de H_1 par rapport au cercle O_1, et et par suite le point H_1 a la même puissance par rapport à tous les cercles circonscrits aux hexagones analogues à ABCDEF qu'on pourrait obtenir en changeant la posi-

tion du point A sur O_2. Il résulte de là que H_1 appartient à la corde commune à deux quelconques de ces cercles ; on en dirait autant du point H_2 et du point H_3. On peut donc énoncer ce théorème :

Toutes les circonférences ω *circonscrites aux hexagones* ABCDEF *ont pour corde commune réelle ou idéale l'axe de similitude* $C_1C_2C_3$.

En particulier, les deux circonférences O et O′ ont pour corde commune l'axe de similitude $C_1C_2C_3$. Leurs centres sont sur une droite perpendiculaire à l'axe de similitude.

V. Chacun des quatre axes de similitude de trois cercles donnés est la corde commune réelle ou idéale de deux circonférences tangentes aux trois cercles.

On peut donner une autre construction simple du cercle tangent à trois cercles donnés.

A partir d'un point quelconque de O_1, entre les cercles O_1 et O_2, mener une droite passant par un centre de similitude A de O_1 et de O_2 et non terminée par des points homologues ; à partir du point ainsi trouvé sur O_2, entre les cercles O_2 et O_3, mener une droite passant par un centre de similitude B de O_2 et de O_3 et non terminée par des points homologues.

Le cercle ω qui passe par les trois points ainsi trouvés peut être un cercle tangent aux trois cercles donnés ; mais généralement le cercle ω coupera les trois cercles O_1, O_2 et O_3, et il faudra, pour avoir un des points de contact cherchés, celui qui est sur O_1 par exemple, mener la corde commune à ω et à O_1 et, par l'intersection de cette corde avec la droite AB, mener une tangente à O_1.

Les cercles ω, et en particulier les deux cercles tangents qui font partie de cette suite de cercles, ont la droite AB pour axe radical commun.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE STEINER;

PAR M. LÉOPOLD BRASSEUR,
Répétiteur à l'École des Mines de Liége.

Lemmes. — 1° Si les trois droites dont chacune unit deux sommets opposés d'un hexagone plan se coupent en un même point, les côtés de cet hexagone sont tangents à une même courbe du second degré. On déduit de là :

2° Si, dans un angle solide de six arêtes, les trois plans dont chacun passe par deux arêtes opposées se coupent suivant une même droite, les faces latérales de cet angle solide sont tangentes à un même cône du second degré ayant même sommet que l'angle solide, et toutes les droites tracées dans les faces de cet angle solide sont tangentes à ce même cône; en d'autres termes, le cône est inscrit à toutes ces droites.

THÉORÈME. — *Le lieu des sommets de tous les cônes du second degré inscrits à un hexagone gauche* (c'est-à-dire touchés par les côtés de cet hexagone) *est un hyperboloïde à une nappe qui a pour directrices les trois diagonales dont chacune relie deux sommets opposés de l'hexagone gauche proposé.* (STEINER, *Entwickelung der geom. Gestalten*; Berlin, 1832, p. 314.)

Considérons une génératrice quelconque G de l'hyperboloïde que nous venons de définir, c'est-à-dire une droite qui rencontre les trois diagonales mentionnées; prenons sur cette génératrice un point quelconque S pour sommet d'un angle solide dont les six arêtes passent respectivement par les six sommets de l'hexagone. Comme deux arêtes opposées passent par les extrémités d'une

même diagonale de l'hexagone, il en résulte que : Si, par la génératrice G et par chaque diagonale on mène un plan, on aura trois plans se coupant suivant la génératrice G, et dont chacun renferme deux arêtes opposées de l'angle solide.

Donc, d'après le lemme 2°, les faces de l'angle solide sont tangentes à un même cône du second degré ayant même sommet que l'angle solide; et les côtés de l'hexagone, lesquels sont situés respectivement dans les six faces de l'angle solide, sont également tangents au même cône; ou, ce qui revient au même, le cône est inscrit à l'hexagone.

Or, le sommet S de ce cône étant un point quelconque de la génératrice G, la propriété se trouve démontrée.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

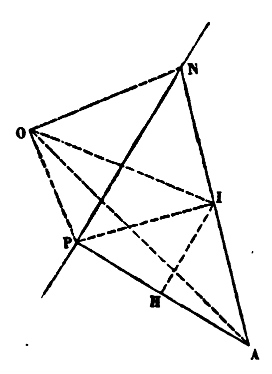
Question 717;

PAR M. LOUIS PABON,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux.

ÉNONCÉ. — *Construire une hyperbole équilatère, connaissant le centre* O, *une tangente* PN, *et un point* A *de la courbe.*

Soient P le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la tangente PN donnée; N le point de contact de cette tangente; I le milieu de la corde AN : on sait que les quatre points O, P, I, N appartiennent à une même circonférence. Il en résulte que le point I se trouve sur l'arc d'un segment capable du supplément de l'angle OPN,

décrit sur la droite OA comme corde, car le quadrilatère



inscriptible OPIN donne

$$OIN = OPN,$$

et par suite

$$OIA = 180^\circ - OPN.$$

En outre, le point I se trouve sur une parallèle à PN, menée par le milieu H de AP; il sera donc déterminé par l'intersection de cette parallèle et de l'arc du segment capable décrit. On obtiendra ensuite le point de contact N, en prolongeant la droite AI jusqu'à sa rencontre avec la tangente AN.

La question est ainsi ramenée à construire une hyperbole, connaissant un demi-diamètre transverse ON, et la direction NP de son conjugué.

Note. — La même question a été résolue par MM. R. La Rougery, Gazères, élèves du lycée de Bordeaux; J.-B. Muntz, du lycée de Strasbourg; Albert Ribaucour, du lycée de Lille (classe de M. Diguet); J. Legrand, du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant); Boussu, du lycée Bonaparte; Talayrach, du lycée Charlemagne; et par MM. E. Janin, de Vigneral, Marmier, M. L.

Question 722;

PAR M. CH. PÉTRELLE,
Élève de l'institution Sainte-Barbe de Paris.

ÉNONCÉ. — *Par chacun des sommets d'un triangle* ABC, *on mène une parallèle au côté opposé; on désigne par* A_1, B_1, C_1 *les sommets opposés aux points* A, B, C *du nouveau triangle formé par ces parallèles : démontrer que le cercle des neuf points du triangle* ABC *touche les cercles des neuf points des triangles* A_1BC, B_1AC, C_1AB *aux milieux des côtés* BC, AC, AB *respectivement.* (JOHN GRIFFITHS.)

Il est évident que les milieux α, β, γ des côtés BC, CA, AB sont respectivement des centres de symétrie pour les couples de triangles

$$ABC,\ A_1BC;\quad ABC,\ AB_1C;\quad ABC,\ ABC_1.$$

Considérons l'un de ces couples, le premier par exemple; nous voyons que la droite OO_1 qui unit les centres O, O_1 des cercles des neuf points des triangles ABC, A_1BC passe par le point α milieu de BC, et comme ces deux cercles ont le point α commun, ils se touchent nécessairement en ce point.

Note. — Des démonstrations géométriques à peu près semblables nous ont été adressées par MM. R. La Rougery, J. Gazères, élèves du lycée de Bordeaux; Jules Hatté, Nievenglowski, du lycée Charlemagne; P. Cagny, du lycée Louis-le-Grand; Adolphe Richard, du lycée de Nancy; Grassat, du lycée de Lyon; H. de l'Estourbeillon, élève de l'École Sainte-Geneviève; A. Juneker, J. Dalsème, Perseval, de l'institution Sainte-Barbe (Paris); Rossigneux, du collége Stanislas; Toubin, de Lons-le-Saulnier; Audoynaud; C. Regnard; Marmier; Autefage. MM. Audoynaud et Dalsème ont aussi démontré par le calcul la proposition énoncée.

Question 723

(voir 1re série, t. IV, p. 86);

PAR M. A. JUNCKER,
Élève de l'institution Sainte-Barbe (cours de M. Bouquet).

Soient α, β, γ *les milieux des côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, O *le centre du cercle circonscrit. Menons* $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ *et prolongeons ces droites jusqu'en* A', B', C', *de telle sorte que*

$$OA' = 2O\alpha,\quad OB' = 2O\beta,\quad OC' = 2O\gamma.$$

Démontrer que le cercle des neuf points du triangle ABC *passe par les points d'intersection de la circonférence circonscrite et de la circonférence conjuguée à chacun des triangles* OB'C', OC'A', OA'B', A'B'C'.

(JOHN GRIFFITHS.)

Remarquons en premier lieu que le cercle des neuf points du triangle ABC coïncide avec celui de l'un quelconque des triangles OB'C', OC'A', OA'B', A'B'C'.

Prenons d'abord A'B'C'; il est homothétique au triangle $\alpha\beta\gamma$ par rapport au centre O, le rapport d'homothétie étant 2. Donc si nous appelons D' et δ les centres des cercles circonscrits à ces deux triangles, les points O, δ, D' sont en ligne droite, et l'on a

$$O\delta = \delta D'.$$

O étant le point de concours des hauteurs du triangle A'B'C', il résulte d'un théorème connu que δ est le centre du cercle des neuf points de ce triangle. Son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit à A'B'C' ou à son égal ABC; le cercle des neuf points est donc le même pour ces deux triangles. Il est d'ailleurs évident qu'il passe par les milieux des côtés des triangles OB'C',

OC′A′, OA′B′. Le théorème à démontrer peut donc s'énoncer ainsi :

« Dans un triangle (A′B′C′ par exemple), le cercle des neuf points, le cercle circonscrit et le cercle conjugué ont même axe radical. »

Pour le démontrer, observons que le cercle conjugué à A′B′C′ a son centre en O (*), point de concours des hauteurs et centre de similitude externe du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

ρ étant son rayon et H le pied de la hauteur abaissée du sommet B′, on a

$$\rho^2 = OB'.OH.$$

Appelons R le rayon du cercle circonscrit, et l la distance OD′ égale à $2O\delta$; le rayon du cercle des neuf points est $\frac{R}{2}$.

Ceci posé, soit E l'un des points communs à ces deux circonférences :

$$\frac{O\delta}{OD'} = \frac{\delta E}{D'E} = \frac{1}{2};$$

OE est donc l'une des bissectrices extérieures du triangle δED′, et l'on démontre en géométrie qu'on a

$$\overline{OE}^2 = O\delta.OD' - \delta E.D'E$$
$$= \frac{1}{2}(l^2 - R^2).$$

Or le point H appartient au cercle des neuf points; si l'on appelle K le second point d'intersection de la hauteur B′H

(*) Pour que le rayon de ce cercle soit réel, il faut et il suffit que l'un des angles du triangle A′B′C′ soit obtus; dans cette démonstration géométrique, l'angle B′ est supposé obtus.

avec la circonférence circonscrite, on a donc

$$OH = \frac{1}{2} OK,$$

et par conséquent

$$\rho^2 = \frac{1}{2} OB'.OK,$$

$$= \frac{1}{2}(l^2 - R^2),$$

$$= \overline{OE}^2.$$

La circonférence conjuguée passe donc par le point E.

La démonstration qui précède suppose que les circonférences se coupent en des points réels. Il est facile de vérifier par le calcul que le théorème est général.

En effet, si l'on prend pour axes de coordonnées l'un des côtés du triangle, A'C' par exemple, et la hauteur correspondante; a, b, c étant les coordonnées des sommets A', B', C', les équations des circonférences considérées sont

$$\left\{\begin{aligned} &x^2 + y^2 - \frac{a+c}{2}x + \frac{ac-b^2}{2b}y = 0, \\ &x^2 + y^2 - (a+c)x - \frac{ac+b^2}{b}y + ac = 0, \\ &x^2 + y^2 + \frac{2ac}{b}y - ac = 0. \end{aligned}\right.$$

Et il est visible qu'en ajoutant les deux dernières équations membre à membre, on retrouve la première.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. Ch. Pétrelle, élève de l'institution Sainte-Barbe; A. Morel, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet); Gazères, du lycée de Bordeaux; Niewenglowski, du lycée Bonaparte; et Autefage, S. J.

Question 727

(voir 1re série, t. IV, p. 31);

PAR M. CAMILLE MASSING,
Élève de l'institution Sainte-Barbe (classe de M. Tarbouriech).

Soit AB *un diamètre d'un cercle*, C *le centre, et soit pris sur ce diamètre* $CP = \frac{1}{3}AC$ (*). *Ayant tiré une droite quelconque par* P *rencontrant la circonférence en* Q, R, *menons les droites* BR, QC; *et soit* S *le point de rencontre de* QC *prolongé avec* BR. *En désignant l'angle* BSQ *par* ψ *et l'angle* CBS *par* φ, *il faut prouver que*

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi} = \left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3. \qquad \text{(STREBOR.)}$$

Je mène CR : en désignant par x_1 et y_1 les coordonnées du point R, par x_2, y_2 celles du point Q, par rapport à la droite AB prise pour axe des x et à une perpendiculaire à cette droite élevée en C prise pour axe des y, j'ai :

$$\begin{cases} x_1 = -\cos 2\varphi, \\ y_1 = \sin 2\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \cos(\varphi+\psi), \\ y_2 = -\sin(\varphi+\psi), \end{cases}$$

car l'angle RCB est égal à $180^\circ - 2\varphi$ et l'angle ACQ à $180^\circ - \varphi - \psi$. J'ai pris pour unité le rayon du cercle donné.

L'abscisse CP du point P s'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la droite qui joint les deux points Q, R. Je trouve ainsi :

$$CP = -\frac{1}{3} = \frac{\cos 2\varphi \sin(\varphi+\psi) - \sin 2\varphi \cos(\varphi+\psi)}{-\sin(\varphi+\psi) - \sin 2\varphi},$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Le point P doit être entre C et A.

d'où

$$\frac{1}{3}=\frac{\sin(\psi-\varphi)}{\sin(\psi+\varphi)+\sin 2\varphi},$$

relation que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\cos\varphi(\sin\psi-\sin\varphi)=2\sin\varphi\cos\psi,$$

et en élevant les deux membres au carré :

$$(1-\sin^2\varphi)(\sin^2\psi+\sin^2\varphi-2\sin\varphi\sin\psi]=4\sin^2\varphi(1-\sin^2\psi].$$

Effectuant et ordonnant par rapport à $\sin\varphi$, je trouve :

$$\sin^4\varphi-2\sin\psi\sin^3\varphi-3(\sin^2\psi-1)\sin^2\varphi$$
$$+2\sin\psi\sin\varphi-\sin^2\psi=0,$$

ou

$$\sin^2\varphi[\sin\varphi+\sin\psi][\sin\varphi-3\sin\psi]$$
$$+(\sin\varphi+\sin\psi)(3\sin\varphi-\sin\psi]=0.$$

Supprimant alors le facteur $\sin\varphi+\sin\psi$, il reste

$$\sin^3\varphi-3\sin^2\varphi\sin\psi+3\sin\varphi-\sin\psi=0,$$

relation qui n'est autre que celle que l'on obtient en considérant l'expression

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}=\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3$$

en chassant le dénominateur et en ordonnant par rapport à $\sin\varphi$.

Remarque. — L'équation

$$\frac{1}{3}=\frac{\sin(\psi-\varphi)}{\sin(\varphi+\psi)+\sin 2\varphi}$$

donne la relation

$$\frac{\sin\frac{\psi-\varphi}{2}}{\sin\frac{3\varphi+\psi}{2}}=\frac{1}{3}:$$

mais cette relation offre moins de symétrie que la relation proposée.

Note. — La même question a été traitée par MM. O. Puel, Viant, du Prytanée; La Rougery, du lycée de Bordeaux; Bichat, du lycée de Nancy; Grassat, de Lyon; Demon, du lycée de Douai; par MM. Audoynaud, Autefage, du Ménil, du collége de Sorrèze.

Même question;

PAR M. V. NIÉBYLOWSKI,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Bonaparte.

Quelle que soit la position de QR, on a

$$\mathrm{CQP} = \frac{\mathrm{SCR}}{2} = \frac{\psi + \varphi - 2\varphi}{2} = \frac{\psi - \varphi}{2};$$

d'où

$$\mathrm{CPQ} = \frac{\psi + 3\varphi}{2}.$$

Exprimons que $\mathrm{CP} = \frac{1}{3}\mathrm{CQ}$, dans le triangle CPQ : on a

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin\frac{\psi - \varphi}{2}}{\sin\frac{\psi + 3\varphi}{2}},$$

d'où

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin\frac{\psi - \varphi}{2}}{\sin\frac{\psi + 3\varphi}{2} - \sin\frac{\psi - \varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{\psi - \varphi}{2}}{2\cos\frac{\psi + \varphi}{2}\sin\varphi},$$

d'où

$$\sin\frac{\psi - \varphi}{2} = \cos\frac{\psi + \varphi}{2}\sin;$$

et développant,

$$(1)\quad \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\psi}{2} = \sin\varphi\left(\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Or les angles $\frac{\psi}{2}$ et $\frac{\varphi}{2}$ étant toujours $\leqq \frac{\pi}{4}$, les valeurs de $\sin\frac{\psi}{2}$, $\cos\frac{\psi}{2}$ et $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi}{2}$ en fonction de $\sin\psi$ et $\sin\varphi$ seront donc

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\psi} \pm \sqrt{1-\sin\psi}\right)$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\varphi} \pm \sqrt{1-\sin\varphi}\right).$$

En substituant dans (1), il vient :

$$(2)\left\{\begin{aligned} &(\sqrt{1+\sin\psi}+\sqrt{1-\sin\psi})(\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}) \\ &\quad-(\sqrt{1+\sin\varphi}+\sqrt{1-\sin\varphi})(\sqrt{1+\sin\psi}-\sqrt{1-\sin\psi}) \\ &=\sin\varphi[(\sqrt{1+\sin\psi}-\sqrt{1-\sin\psi})(\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}) \\ &\quad-(\sqrt{1+\sin\psi}+\sqrt{1-\sin\psi})(\sqrt{1+\sin\varphi}+\sqrt{1-\sin\varphi})]. \end{aligned}\right.$$

En effectuant et en simplifiant on a

$$(3)\left\{\begin{aligned} &\sqrt{(1+\sin\psi)(1-\sin\varphi)}-\sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)} \\ &=\sin\varphi[\sqrt{(1+\sin\psi)(1-\sin\varphi)}+\sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)}], \end{aligned}\right.$$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &(1-\sin\varphi)\sqrt{(1+\sin\psi)(1-\sin\varphi)} \\ &=(1+\sin\varphi)\sqrt{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^2=\frac{(1+\sin\varphi)(1-\sin\psi)}{(1-\sin\varphi)(1+\sin\psi)},$$

ou

$$\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}=\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Lorsque le point Q va de A vers B,

l'angle $BCS = \pi - (\psi + \varphi)$ croît de zéro à π; en A l'angle est nul, $\psi = \varphi = \frac{\pi}{2}$; en B, $\psi = \varphi = 0$.

La somme $\psi + \varphi$ va donc en décroissant d'une manière continue quand Q va de A vers B, ψ restant toujours $> \varphi$ dans l'intervalle, et comme aux deux points limites A et B.

La différence $\psi - \varphi$ est nulle : il s'ensuit que dans l'intervalle elle passera par un maximum, c'est ce qui a lieu lorsque QR est perpendiculaire à AB.

De plus, le maximum des angles ψ et φ est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Généralisation. — Considérons le cas plus général où

$$CP = \frac{1}{n} CQ:$$

il vient alors

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\psi + 3\varphi) - \sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi)} = \frac{1}{n-1},$$

d'où

$$\frac{n-1}{2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \varphi) = \cos \frac{1}{2}(\psi + \varphi) \sin \varphi,$$

et, en effectuant les mêmes transformations que pour le premier cas,

$$\left(\frac{\frac{n-1}{2} - \sin \varphi}{\frac{n-1}{2} + \sin \varphi} \right)^2 = \frac{(1 + \sin \varphi)(1 - \sin \psi)}{(1 - \sin \varphi)(1 + \sin \psi)},$$

d'où

$$\frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \times \left(\frac{1 - \frac{2}{n-1} \sin \varphi}{1 + \frac{2}{n-1} \sin \varphi} \right)^2.$$

Si l'on fait $n = 3$, on a bien

$$\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)^3;$$

dans le cas où $n = 2$, il vient

$$\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \left(\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\right)\left(\frac{1 - 2\sin\varphi}{1 + 2\sin\varphi}\right)^2.$$

D'où ce théorème pour le triangle équilatéral inscrit: Si on joint le milieu P d'un côté du triangle équilatéral au sommet opposé B, que par P on mène une sécante quelconque qui coupe la circonférence en Q et R, et qu'on joigne BR et QC (C centre du cercle) prolongé jusqu'en S, intersection avec BR, on a, en posant $BSQ = \psi$, $CBS = \varphi$,

$$\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}\left(\frac{1 - 2\sin\varphi}{1 + 2\sin\varphi}\right)^2,$$

et des théorèmes analogues pour d'autres polygones.

QUESTIONS D'EXAMEN (1864)

(voir p. 280).

Géométrie analytique. (Suite.)

58. Que représente l'équation $p^2 = q$, p et q étant deux fonctions linéaires?

59. Lieu des centres d'une ellipse de grandeur donnée, qui se meut de manière à toucher constamment une droite fixe en un point fixe. — Lieu des sommets.

60. Est-il nécessaire que les axes soient rectangulaires pour que l'équation du plan se puisse mettre sous la

forme

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p.$$

61. Plans qui coupent un paraboloïde hyperbolique suivant des hyperboles équilatères.

62. Équation d'une section plane d'une surface, rapportée à deux axes situés dans son plan.

63. Mener une normale à la parabole par un point extérieur.

64. Nature de la surface représentée par l'équation

$$yz + zx + xy = 1.$$

65. Lieu des points à égale distance de deux droites fixes (dans l'espace).

66. Condition pour qu'une équation du deuxième degré représente deux plans.

67. Équation générale des courbes du second degré ayant les mêmes foyers.

68. Mener une tangente par un point (α, β) à une ellipse. Cas où le point (α, β) est un foyer.

69. Le point d'intersection de deux sécantes communes à deux courbes du second degré a même polaire par rapport aux deux courbes.

70. Courbe représentée par

$$x^4 - 5ay^2x^2 + y^5 = 0.$$

71. Sections circulaires des surfaces du second degré.

72. Trouver le centre d'un hyperboloïde à une nappe, connaissant trois génératrices d'un même système.

73. Surface représentée par

$$(x + y)(x - y + z) + 2x = 0.$$

74. Surface représentée par $\alpha\beta = \gamma\delta$, α, β, γ, δ étant des fonctions linéaires. — Cas où les quatre plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ se coupent en un même point.

75. Sections circulaires de la surface

$$xy + xz + yz + 1 = 0.$$

76. Plusieurs paraboles ont même directrice et leurs sommets en ligne droite. Lieu des pieds des normales menées à ces paraboles d'un même point de la directrice commune.

77. Lieu des sommets des hyperboles équilatères concentriques et passant par un point donné.

78. Construire la courbe

$$x^2 - \frac{1}{x^2} + y^2 - \frac{1}{y^2} - 2\left(xy - \frac{1}{xy}\right) = 0.$$

79. Si deux courbes du second degré sont concentriques, toutes les courbes du second degré passant par les points communs aux deux premières seront concentriques.

80. Lieu des centres des coniques tangentes à deux droites données en des points donnés.

81.

$$\rho = \sin^2\omega - \sin^4\omega.$$

82. Équation générale des coniques circonscrites au triangle dont les côtés ont pour équation

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

tangente à un sommet de ce triangle.

83. Point d'inflexion, sa détermination.

84. Surface engendrée par une droite qui glisse sur deux droites données et sur un cercle donné.

85. Trouver les points où la tangente à une courbe rapportée à des coordonnées polaires est perpendiculaire à l'axe polaire.

86. Équation générale des surfaces de révolution ; cas où l'axe des z est l'axe de rotation.

CORRESPONDANCE.

M. Transon a donné à la page 458 de notre précédent volume le théorème suivant :

Soit $f(x, y) = 0$ *l'équation d'une courbe du second degré. Si d'un point* M, *dont les coordonnées sont* (α, β), *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la polaire de ce point et qu'on la prolonge jusqu'en* A, *où elle rencontre l'un des axes de la courbe, on trouve que* $f(\alpha, \beta)$ *est proportionnel au produit* MP.MA.

Nous avons reçu, au sujet de ce théorème et d'une conséquence que M. Mannheim en a déduite, plusieurs communications que nous allons résumer.

1. M. Cornu, élève de Sainte-Barbe, démontre le théorème d'abord pour les courbes à centre rapportées à leur centre et à leur axe; et ensuite pour la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. M. Cornu fait remarquer qu'on a pour les surfaces du second ordre un théorème analogue, dont voici l'énoncé :

Soient $f(x, y, z) = 0$ *l'équation d'une surface du second ordre ;* MP *la perpendiculaire abaissée du point* M (α, β, γ) *sur le plan polaire de ce point ;* A *le point où* MP *prolongé rencontre l'un des plans principaux de la surface :* $f(\alpha, \beta, \gamma)$ *est proportionnel au produit* MP.MA.

M. Mannheim avait remarqué que si le point A (dans le cas des courbes du second degré) est sur le petit axe, les points P, A, F et F′ sont sur un même cercle. M. Cornu ajoute que le point d'intersection B de la polaire du point M avec le même axe se trouve sur ce cercle. Un théorème analogue a lieu pour le grand axe, mais, dans ce cas, le cercle passe par les foyers imaginaires situés sur le petit axe.

M. Cornu déduit aussi le même théorème d'un théorème plus général : mais ce dernier n'étant ni d'un énoncé plus simple ni d'une démonstration plus facile, il n'y a aucun avantage à s'en servir dans la question actuelle.

2. M. Painvin. — « Si $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe du $n^{ième}$ ordre; si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont les intersections de la courbe et d'une droite passant par les points $M(x, y)$ et $P(\alpha, \beta)$, on a

$$\frac{MM_1 . MM_2 . MM_3 \ldots MM_n}{PM_1 . PM_2 . PM_3 \ldots PM_n} = \frac{f(x, y)}{f(\alpha, \beta)}.$$

C'est le théorème de Newton donnant une signification géométrique de $f(x, y)$ dans les courbes d'un degré quelconque. On peut en déduire beaucoup de significations géométriques dans le cas des courbes du second degré. »

3. M. Mathieu, à Toulouse, trouve, comme l'annonce M. Painvin, d'autres significations. Si l'angle des axes est θ, et x_0, y_0 les coordonnées du centre de la courbe, on a, quand les axes varient, la courbe du second degré restant fixe,

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{f(x_0, y_0)} = \text{const.},$$

$$\frac{f(\alpha, \beta) \sin^2 \theta}{A + C - B \cos \theta} = \text{const.},$$

$$\frac{f^2(\alpha, \beta)\sin^2\theta}{B^2 - 4AC} = \text{const.},$$

et des formules analogues pour les surfaces du second ordre. Nous ne citerons que la première, qui est la plus simple,

$$\frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{f(x_0, y_0, z_0)} = \text{const.};$$

elle conduit au théorème sur les surfaces du second ordre cité plus haut.

4. MM. Bertrand et Grassat, élèves du lycée de Lyon, démontrent à peu près comme M. Cornu le théorème de M. Transon et la conséquence que M. Mannheim en a déduite : démonstration analytique trop facile pour qu'il y ait utilité à la reproduire.

5. M. Recoq, élève du lycée de Montpellier (classe de M. Berger), énonce les deux théorèmes suivants, dont l'un est une variante du théorème de M. Transon :

La valeur que reçoit le premier membre de l'équation d'une conique, quand on y remplace x et y par les coordonnées d'un point quelconque du plan, représente, à un facteur constant près, le rapport des distances de la polaire du point considéré à ce point et au centre. — Théorème analogue pour une surface du second degré.

P.

THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN POINT (*);

PAR M. L. PAINVIN.

Il est inutile, je pense, d'insister sur l'importance des équations tangentielles; le double système des coordonnées d'un point et des coordonnées d'un plan ou d'une droite est la traduction analytique de la dualité géométrique, dualité qui a sa raison d'être dans le double mode de génération des courbes et des surfaces. Or, les définitions que je vais présenter nous conduisent, dans le cas des équations tangentielles, à des formules identiques à celles qu'on rencontre dans la théorie des polaires d'un point; c'est donc le complément naturel et indispensable de cette importante théorie.

Je ne donnerai d'ailleurs ici que les principes fondamentaux, et seulement pour les surfaces; l'application aux courbes planes des définitions et des formules que nous rencontrerons ne saurait offrir aucune difficulté.

PREMIÈRE PARTIE.

Coordonnées d'un point, coordonnées d'un plan.

1. J'indiquerai d'abord les dénominations que je dois employer.

1° Supposons donnée une équation qui définit une surface : si cette équation est une relation entre les coordonnées d'un point quelconque de cette surface, je l'appellerai *équation ponctuelle de la surface* ou *équation en coordonnées-point de la surface;* si cette équation est une relation entre les coordonnées d'un plan tangent quelconque à cette surface, je la nommerai *équation tangentielle de la surface*.

(*) Mémoire présenté au Comité des Sociétés savantes, le 14 novembre 1862 (*voir* la *Revue des Sociétés savantes*, t. II, p. 239).

Ces dénominations ne seront d'ailleurs nécessaires que lorsque les équations seront envisagées à la fois sous ce double point de vue.

2° Dans ce Mémoire, je définirai un point ou un plan en le rapportant à un tétraèdre.

Les produits des distances d'un point aux quatre faces d'un tétraèdre par des nombres fixes seront dits les *coordonnées tétraédriques du point.*

Les produits des distances des quatre sommets d'un tétraèdre à un plan par des nombres fixes seront dits les *coordonnées tétraédriques du plan.*

3° Dans les figures planes :

Les produits des distances d'un point aux trois côtés d'un triangle par des nombres fixes peuvent être appelés les *coordonnées trilatères* du point;

Les produits des distances des trois sommets d'un triangle à une droite par des nombres fixes seront les *coordonnées trilatères* de la droite.

N. B. — Convenant, une fois pour toutes, de rapporter un point et un plan à un tétraèdre, je supprimerai, la plupart du temps, le mot *tétraédriques,* et je me contenterai de dire les *coordonnées d'un point,* les *coordonnées d'un plan.*

2. *Coordonnées tétraédriques d'un point.* — Dans ce système, un point est déterminé par ses distances à quatre plans fixes, *formant un tétraèdre,* ces distances étant multipliées respectivement par des nombres constants.

Soient les équations des quatre plans fixes, dits *plans de référence,*

$$(1)\quad \begin{cases} (A) & a\xi + a'\eta + a''\zeta + a''' = 0, \\ (B) & b\xi + b'\eta + b''\zeta + b''' = 0, \\ (C) & c\xi + c'\eta + c''\zeta + c''' = 0, \\ (D) & d\xi + d'\eta + d''\zeta + d''' = 0, \end{cases}$$

ξ, η, ζ étans les *coordonnées cartésiennes* d'un point M. Si nous admettons que les axes des ξ, η, ζ soient rectangulaires, les distances du point $M(\xi, \eta, \zeta)$ à ces quatre plans, seront

$$\alpha = \frac{a\xi + a'\eta + a''\zeta + a'''}{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}}, \quad \gamma = \frac{c\xi + c'\eta + c''\zeta + c'''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$
$$\beta = \frac{b\xi + b'\eta + b''\zeta + b'''}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}}, \quad \delta = \frac{d\xi + d'\eta + d''\zeta + d'''}{\sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2}}.$$

Nous poserons

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}, \\ y = \beta\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}, \\ z = \gamma\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}, \\ t = \delta\sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2}, \end{array} \right.$$

en disposant des signes des radicaux, ou, ce qui revient au même, des signes des constantes a, b, c, a', b',..., de manière que les produits x, y, z, t soient positifs lorsque le point correspondant est dans l'intérieur du tétraèdre de référence; d'où

$$(2\ bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a\xi + a'\eta + a''\zeta + a''', \\ y = b\xi + b'\eta + b''\zeta + b''', \\ z = c\xi + c'\eta + c''\zeta + c''', \\ t = d\xi + d'\eta + d''\zeta + d'''. \end{array} \right.$$

Les quantités x, y, z, t sont les *coordonnées tétraédriques* du point M; le tétraèdre fixe ABCD sera dit *tétraèdre de référence*, et les nombres constants

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2}, \quad \sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2},$$
$$\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}, \quad \sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2}$$

seront les *paramètres de référence.*

Si l'on désigne par V le volume du tétraèdre ABCD,

par m, n, p, q les quotients des aires de ses faces par les paramètres correspondants, on aura entre les quatre coordonnées x, y, z, t la relation

$$(3) \qquad mx + ny + pz + qt = 3V.$$

Les formules (2 *bis*) et (3) permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées tétraédriques, et inversement.

Les signes des coordonnées x, y, z, t devront être déterminés d'après la convention suivante : « Les pro-
» duits x, y, z, t seront précédés du signe *plus* ou *moins*,
» suivant que le point se trouvera ou non du même côté
» que le sommet opposé à la face par rapport à laquelle
» on évalue la distance. »

3. Étant donnés deux points $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$, un point $M(x, y, z, t)$ situé sur la droite M_1M_2, et tel que

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{\lambda}{\mu},$$

aura pour coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}, \\ y &= \frac{\lambda y_2 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \\ z &= \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}, \\ t &= \frac{\lambda t_2 + \mu t_1}{\lambda + \mu}, \end{aligned}\right.$$

et *réciproquement*, si les coordonnées x, y, z, t d'un point vérifient les relations

$$\frac{x}{\lambda x_2 + \mu x_1} = \frac{y}{\lambda y_2 + \mu y_1} = \frac{z}{\lambda z_2 + \mu z_1} = \frac{t}{\lambda t_2 + \mu t_1},$$

ce point sera sur la droite M_1M_2 et la divisera dans le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$.

4. Un plan, dans le système de coordonnées que je viens de définir, a une équation de la forme

$$(4)\qquad Mx + Ny + Pz + Qt = 0,$$

et le plan à l'infini est

$$(4\ bis)\qquad mx + ny + pz + qt = 0.$$

La distance d'un point x, y, z, t au plan (4) est

$$\frac{Mx+Ny+Pz+Qt}{\sqrt{(aM+bN+cP+dQ)^2+(a'M+b'N+c'P+d'Q)^2+(a''M+b''N+c''P+d''Q)^2}};$$

on arrivera immédiatement à cette expression en partant de l'expression correspondante en coordonnées cartésiennes.

D'après cette formule et la relation (3), on conclut entre les distances α_1, β_1, γ_1, δ_1 des sommets du tétraèdre de référence au plan

$$(6)\qquad Mx + Ny + Pz + Qt = 0$$

les relations suivantes :

$$(7)\qquad \frac{m\alpha_1}{M} = \frac{n\beta_1}{N} = \frac{p\gamma_1}{P} = \frac{q\delta_1}{Q}.$$

Ces notions étant rappelées, je vais maintenant définir les coordonnées *tétraédriques d'un plan.*

5. *Coordonnées tétraédriques d'un plan.* — Dans ce système de coordonnées, on définit un plan par ses distances à quatre points fixes, ces distances étant respectivement multipliées par quatre nombres fixes; ces produits seront appelés les *coordonnées tétraédriques du plan.*

Choisissant le tétraèdre précédent pour tétraèdre de référence, je poserai

$$(8)\quad \begin{cases} X = m\alpha_1, \\ Y = n\beta_1, \\ Z = p\gamma_1, \\ T = q\delta_1, \end{cases}$$

les produits X, Y, Z, T sont les *coordonnées tétraédriques du plan* considéré; les nombres m, n, p, q sont les *paramètres de référence.*

Les relations (6), (7) et (8) nous montrent qu'un plan dont les coordonnées sont X, Y, Z, T a pour *équation ponctuelle*

$$(9)\qquad Xx + Yy + Zz + Tt = 0.$$

Enfin, V étant le volume du tétraèdre de référence, on a entre les coordonnées tétraédriques X, Y, Z, T d'un plan la relation

$$(10)\quad \begin{cases} (aX + bY + cZ + dT)^2 + (a'X + b'Y + c'Z + d'T)^2 \\ \quad + (a''X + b''Y + c''Z + d''T)^2 = 9V^2. \end{cases}$$

On arrive à cette relation en comparant les distances du sommet A, par exemple, au plan (9), ces distances étant évaluées successivement à l'aide des formules (5) et (8).

La discussion de l'équation (9) conduit à la convention suivante relative aux signes des coordonnées :

« On devra prendre avec le même signe les longueurs
» des perpendiculaires qui, menées des points de réfé-
» rence vers le plan considéré, sont dirigées dans un
» certain sens, et avec le signe contraire celles qui sont
» dirigées dans l'autre sens. »

6. *Étant donnés deux plans* $P_1(X_1, Y_1, Z_1, T_1)$ *et* $P_2(X_2, Y_2, Z_2, T_2)$, *un troisième plan* $P(X, Y, Z, T)$ *passant par l'intersection* D *des deux premiers et tel*

que

$$\frac{\sin \widehat{PDP_1}}{\sin \widehat{PDP_2}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

aura pour coordonnées

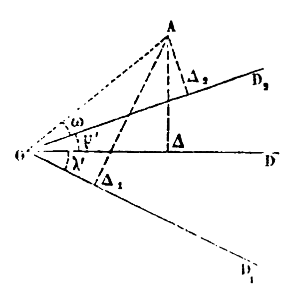
$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\lambda X_2 + \mu X_1}{\rho}, \\ Y &= \frac{\lambda Y_2 + \mu Y_1}{\rho}, \\ Z &= \frac{\lambda Z_2 + \mu Z_1}{\rho}, \\ T &= \frac{\lambda T_2 + \mu T_1}{\rho}, \end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles

$$(11\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta}, \\ \theta &= \widehat{P_1DP_2}. \end{aligned}\right.$$

Cette proposition, qui est fondamentale dans la théorie que je vais exposer, peut s'établir de la manière suivante :

Par un des sommets de référence, A par exemple,



menons un plan perpendiculaire à l'intersection des plans considérés; soient O, D_1, D, D_2, les intersections de la

droite D et des plans P_1, P, P_2 par le plan perpendiculaire; λ', μ', ω, les angles DOD_1, DOD_2, AOD_2; et enfin Δ, Δ_1, Δ_2, les distances du sommet A aux droites D, D_1, D_2, on a

$$\Delta_2 = OA\sin\omega,$$
$$\Delta = OA\sin(\omega+\mu') = \Delta_2\cos\mu' + OA\cos\omega\sin\mu',$$
$$\Delta_1 = OA\sin(\omega+\lambda'+\mu') = \Delta_2\cos(\lambda'+\mu') + OA\cos\omega\sin(\lambda'+\mu').$$

Éliminant $\cos\omega$ entre les deux dernières relations, on trouve

$$\Delta = \frac{\Delta_2\sin\lambda' + \Delta_1\sin\mu'}{\sin(\lambda'+\mu')} \quad \text{ou} \quad X = \frac{X_2\sin\lambda' + X_1\sin\mu'}{\sin(\lambda'+\mu')}.$$

Si maintenant on a égard aux relations

$$\lambda'+\mu' = \theta, \quad \frac{\sin\lambda'}{\sin\mu'} = \frac{\lambda}{\mu},$$

on arrive, après quelques transformations faciles, aux formules (11).

Réciproquement, si les coordonnés X, Y, Z, T *d'un plan* P *vérifient les relations*

$$(12) \quad \frac{X}{\lambda X_2+\mu X_1} = \frac{Y}{\lambda Y_2+\mu Y_1} = \frac{Z}{\lambda Z_2+\mu Z_1} = \frac{T}{\lambda T_2+\mu T_1},$$

ce plan passera par l'intersection D *des plans* P_1 *et* P_2, *et l'on aura*

$$\frac{\sin\widehat{PDP_1}}{\sin\widehat{PDP_2}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

En effet, les équations ponctuelles des plans P_1 et P_2 sont (9)

$$(P_1) \qquad X_1x + Y_1y + Z_1z + T_1t = 0,$$
$$(P_2) \qquad X_2x + Y_2y + Z_2z + T_2t = 0;$$

et, en désignant par K la valeur commune des rapports (12), on aura pour l'équation du plan P

$$(\mathrm{P})\ \lambda(X_2x+Y_2y+Z_2z+T_2t)+\mu(X_1x+Y_1y+Z_1z+T_1t)=0;$$

c'est évidemment l'équation d'un plan passant par l'intersection des deux premiers.

D'après les formules (5) et (10), les distances d'un point quelconque (x, y, z, t) du plan P aux deux plans P_1 et P_2 sont respectivement

$$\pm\frac{X_1x+Y_1y+Z_1z+T_1t}{9V^2},\quad \pm\frac{X_2x+Y_2y+Z_2z+T_2t}{9V^2};$$

leur rapport est visiblement $\frac{\lambda}{\mu}$ d'après l'équation du plan P.

7. L'équation linéaire et homogène

$$(13)\qquad AX+BY+CZ+DT=0$$

représente un point. Car, soit une solution (X, Y, Z, T) de l'équation (13); le plan (X, Y, Z, T) aura pour *équation ponctuelle*

$$Xx+Yy+Zz+Tt=0.$$

Éliminons T entre cette équation et la précédente, il vient

$$X(At-Dx)+Y(Bt-Dy)+Z(Ct-Dz)=0.$$

Or, cette équation représente un plan passant par le point fixe

$$(14)\qquad \frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\frac{t}{D},$$

lorsqu'on laisse X, Y, Z indéterminées. Donc *l'équation* (13), qui représente la surface-enveloppe des

plans (X, Y, Z, T), est *l'équation d'un point, et les coordonnées tétraédriques de ce point sont données par les équations* (14).

8. L'*équation tangentielle* d'une surface étant

$$U(X, Y, Z, T) = 0,$$

le point de contact du plan tangent (X_0, Y_0, Z_0, T_0) aura pour équation

$$(15) \quad X\left(\frac{dU}{dX}\right)_0 + Y\left(\frac{dU}{dY}\right)_0 + Z\left(\frac{dU}{dZ}\right)_0 + T\left(\frac{dU}{dT}\right)_0 = 0,$$

avec la condition

$$(15 \text{ bis}) \qquad U(X_0, Y_0, Z_0, T_0) = 0.$$

En effet, l'équation $U = 0$ étant homogène, l'équation (15) admettra les solutions (X_0, Y_0, Z_0, T_0) et $(X_0 + dX_0, Y_0 + dY_0, Z_0 + dZ_0, T_0 + dT_0)$, c'est-à-dire que les intersections du plan tangent P_0 avec tous les plans tangents infiniment voisins passeront par le point (15), lequel est, par conséquent, le point de contact du plan P_0.

(*La suite prochainement.*)

SECTION DU TORE PAR UN PLAN ET PAR UNE SPHÈRE BITANGENTS;

PAR M. NOMBEL,
Élève de l'École Polytechnique.

THÉORÈME. — *La section d'un tore par un plan bitangent est l'ensemble de deux circonférences.*

Le cercle de l'infini peut être considéré comme un pa-

rallèle double de la surface; donc toute section plane du tore a pour points doubles les deux points d'intersection de son plan et de ce cercle, c'est-à-dire les deux points de l'infini par lesquels passent tous les cercles de ce plan.

Si en particulier on coupe la surface par un plan bitangent, la courbe obtenue est du quatrième degré et a quatre points doubles; elle est donc l'ensemble de deux coniques. Or, chacune de ces coniques passe par les deux points de l'infini qui appartiennent à tous les cercles; la section se compose donc de deux cercles.

Ce qui précède démontre en outre que l'on ne peut placer sur le tore d'autres coniques que le cercle.

Théorème. — *La section d'un tore par une sphère bitangente est l'ensemble de deux circonférences.*

Il faut d'abord remarquer que la portion située à distance finie de la courbe d'intersection d'une sphère et d'un tore est une ligne du quatrième ordre seulement. La raison en est que la sphère contient le parallèle double du tore.

Cela posé, considérons une sphère bitangente. Le plan méridien du tore qui passe par le centre de la sphère contient les deux points de contact des deux surfaces. Le cylindre projetant la courbe d'intersection sur ce plan est du second degré; il est d'ailleurs évidemment bitangent à la sphère. Sa courbe d'intersection avec la sphère, qui n'est autre que celle du tore et de la sphère, se compose donc de deux cercles.

Ainsi, la section d'un tore par une sphère bitangente se compose de deux circonférences.

Note. — M. E. West nous a remis une démonstration fondée sur les mêmes principes. Au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, il étend à la cyclide quelques propriétés du tore, travail déjà fait, et plus complétement, par M. Mannheim (t. XIX, p. 65).

NOTE SUR LA SECTION DU TORE PAR LE PLAN BITANGENT;

PAR M. LÉON DYRION,
Élève de l'École Polytechnique.

J'écris l'équation du cercle dans le plan des xz sous la forme

$$z^2 - x^2 \operatorname{tang}^2\alpha + (1 + \operatorname{tang}^2\alpha)(x - d)^2 = 0,$$

α étant l'angle de la tangente ot menée par l'origine au cercle, et d l'abscisse du point t (*voir* la première figure de la Note suivante). Pour avoir l'équation du tore, je remplace x^2 par $x^2 + y^2$, et j'ai

$$z^2 - x^2 \operatorname{tang}^2\alpha - y^2 \operatorname{tang}^2\alpha + (1 + \operatorname{tang}^2\alpha)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - d\right)^2 = 0,$$

et si on coupe par le plan $z = x \operatorname{tang}\alpha$, on a pour équation de la projection

$$(d \pm y \sin\alpha)^2 = x^2 + y^2$$

ou

$$d^2 \pm 2dy \sin\alpha = x^2 + y^2 \cos^2\alpha.$$

Si maintenant on veut la section dans son plan, je remplace x par $x \cos\alpha$, et j'ai

$$d^2 \pm 2dy \sin\alpha = (x^2 + y^2)\cos^2\alpha.$$

Appelant R la distance oc, r le rayon du cercle, on a immédiatement

$$x^2 (y \pm r)^2 = \mathrm{R}^2,$$

résultat connu.

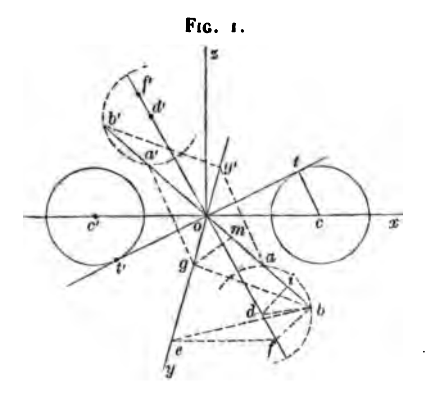
Note.

La proposition sur le plan bitangent est due à M. Yvon Villarceau; elle a été démontrée très-simplement au moyen de la Géométrie élémentaire par M. Barbier (*voir* le recueil scientifique intitulé *les Mondes*, t. III, p. 703). J'indiquerai ici une autre démonstration fondée de même sur les éléments les plus simples de la Géométrie, et conduisant facilement à la proposition relative à la sphère bitangente.

Il résulte de la définition du *tore*, que si le point o est le centre de cette surface et oz son axe, toute section du tore par un plan zox contenant oz est formée de deux circonférences égales, dont les centres c, c', équidistants du point o, appartiennent à la perpendiculaire élevée en ce point à l'axe oz. Le rayon de ces circonférences et la distance de leurs centres au point o sont invariables; je nommerai r et d ces deux lignes.

Quand le plan zox tourne autour de oz, la tangente tot' commune aux deux circonférences c, c', décrit

Fig. 1.



un cône de révolution bitangent au tore, les circonférences décrites par les points t, t' sont les deux lignes de contact.

Il est clair qu'un plan tangent à ce cône, suivant une génératrice quelconque tot', est bitangent au tore aux points t et t', et que sa trace sur le plan de l'équateur est une droite oy, perpendiculaire au plan toz.

La section du tore par ce plan bitangent toy, se forme de deux circonférences égales, ayant pour centres les points g, g', situés sur la trace oy, à une distance r du point o, et dont les rayons sont égaux à d : c'est ce que je vais démontrer.

Soit mené par l'axe oz un plan quelconque, ses traces sur les plans xoy, toy seront des droites fof', bob', et il coupera le tore suivant deux circonférences égales ayant leurs centres d, d' sur fof'. Ces deux circonférences sont rencontrées par la droite bob' en des points b, a, a', b', dont le lieu géométrique est la section du tore par le plan bitangent.

Du point b je mène bf perpendiculaire à of, puis fe perpendiculaire à oy. Les droites eb, ef étant parallèles à ot, oc, les triangles rectangles bfe, cto ont leurs angles égaux ; donc

$$(1) \qquad \frac{eb}{bf} = \frac{oc}{ct} = \frac{d}{r}.$$

Sur oy je prends $og = r$, et j'abaisse sur ob les perpendiculaires gm, di. Les triangles rectangles gmo, dio sont respectivement semblables aux triangles beo, bfo ; et de là

$$(2) \qquad \frac{eb}{gm} = \frac{bo}{go},$$

$$(3) \qquad \frac{bf}{di} = \frac{bo}{do}.$$

Divisant membre à membre l'égalité (2) par l'égalité (3), il vient

$$\frac{eb}{bf} \times \frac{di}{gm} = \frac{do}{go} = \frac{d}{r};$$

mais

$$\frac{eb}{bf} = \frac{d}{r}, \quad \text{donc} \quad gm = di.$$

D'ailleurs

$$og = r = db;$$

par conséquent, les triangles rectangles *gmo*, *dib* sont égaux entre eux, et de leur égalité résulte celle des triangles rectangles *gmb*, *dio*; il s'ensuit

$$gb = od = d.$$

De ce qu'on a

$$om = ib \quad \text{et} \quad oa = oa',$$

il faut conclure que

$$ma' = mb \quad \text{et} \quad ga' = gb = d.$$

Ainsi, le lieu géométrique des points b et a' est une circonférence décrite dans le plan bitangent, du point g comme centre avec d pour rayon.

En prenant sur le prolongement de oy la distance $og' = og$, et menant les droites $g'b'$, $g'a$, on aura

$$g'b' = gb = d \quad \text{et} \quad g'a = ga' = d,$$

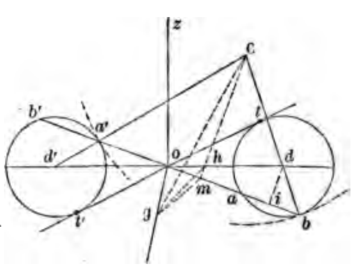
c'est-à-dire que le lieu géométrique des points b', a, est une seconde circonférence dont g' est le centre, et d le rayon. Donc, la section du tore par le plan bitangent considéré, se forme des deux circonférences g, g' qui se coupent aux points t, t'. La première proposition est ainsi démontrée.

Pour déterminer le centre et le rayon d'une sphère bitangente au tore, il suffit de décrire, dans un plan passant par l'axe de la surface, un cercle qui touche les deux cercles de la section faite par ce plan, l'un intérieurement et l'autre extérieurement. Soient C, d, d' les centres

de ces trois cercles, et b, a' les points de contact : la sphère dont C est le centre et Cb le rayon sera bitangente au tore, aux points b, a'.

La corde des contacts ba' passe par le point o, centre de similitude inverse des circonférences égales d, d'. Par


Fig. 2.



la droite ba' on peut mener deux plans bitangents au tore, parce qu'on peut mener par cette droite deux plans tangents au cône de révolution dont l'axe est oz, et qui a pour génératrice la tangente tot' commune aux deux cercles d, d'. Chacun de ces plans bitangents coupe le tore suivant deux circonférences, et sur l'une d'elles se trouvent les points b, a' (p. 351) ; il y a donc sur la surface du tore deux circonférences passant chacune par les points b et a'. Ces deux circonférences appartiennent à la sphère bitangente au tore : en cela consiste la proposition à démontrer.

Soient g le centre, et, par conséquent, gba' le plan de l'une des circonférences dont il s'agit, tout se réduit à prouver que la droite Cg est perpendiculaire au plan gba'.

On sait que le point g est situé sur le plan de l'équateur, à une distance r du point o, et que les perpendiculaires gm, di, abaissées des points g et d sur ob, étant égales entre elles, on a

$$om = bi, \quad bm = oi, \quad gb = d \text{ (p. 351)}.$$

De plus, Cm est perpendiculaire à ba', car $Cb = Ca'$. Cette perpendiculaire Cm rencontre dd' en un point h, et le parallélisme des droites hm, di donne

$$\frac{hm}{di} = \frac{om}{oi} = \frac{bi}{bm} = \frac{di}{Cm}.$$

Mais

$$di = gm, \quad \text{donc} \quad \frac{hm}{gm} = \frac{gm}{Cm};$$

par conséquent, les triangles gmh, gmC sont semblables, et les angles ghm, Cgm sont égaux entre eux. Or, l'angle ghm est droit, car gh est perpendiculaire au plan ohm, comme intersection des deux plans ghm, gho, perpendiculaires à ohm; donc, l'angle Cgm, égal à ghm, est droit. En outre, l'un des côtés gm de l'angle droit Cgm coïncide avec l'intersection des deux plans Cgm, gba' qui sont perpendiculaires entre eux; il s'ensuit que la droite Cg est perpendiculaire au plan gba'. Ce qu'il fallait démontrer.

De là je conclus que toute sphère bitangente au tore coupe la surface du tore suivant deux circonférences dont les rayons sont égaux à d, et qui ont leurs centres sur le plan de l'équateur, à la distance r du centre de la surface.

G.

NOTE SUR LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL pour la classe de Mathématiques spéciales en 1858;

PAR M. PIERRE DELAITRE,
Élève du lycée Bonaparte.

Cette question est énoncée dans le numéro de juillet 1859 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Réduite

à sa partie essentielle, elle consiste à trouver le nombre des racines réelles de l'équation

$$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha)$$

comprises entre o et 2π, h étant un nombre positif et α un angle aussi donné compris entre o et π.

Deux professeurs se sont occupés de cette question dans le numéro cité et dans le suivant. Ils considèrent les racines de l'équation comme les abscisses des points d'intersection des deux courbes représentées par

$$y = h \sin^4 x,$$
$$y = \sin(x - \alpha).$$

En construisant ces courbes (*voir* p. 284 et suiv.), ils mettent en évidence deux racines réelles comprises entre o et 2π. Ils reconnaissent encore que pour des valeurs convenables des données, l'équation peut avoir deux autres racines réelles dans le même intervalle. Afin de trouver dans quels cas ces deux racines existent, ils cherchent d'abord les conditions pour que les deux courbes soient tangentes; mais la complication de leur calcul ne leur permet pas d'arriver à des formules générales. Ils ne font qu'indiquer une règle pratique pour chaque cas particulier. Abordant ensuite la question proposée, ils se bornent encore à tracer la marche à suivre dans les exemples numériques, sans avoir le soin d'appuyer leurs assertions sur une démonstration rigoureuse; de sorte qu'au point de vue théorique la question ne me paraît pas épuisée.

Je me propose, dans cette Note, de trouver les conditions générales pour que l'équation

$$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha)$$

ait quatre racines réelles entre o et 2π.

Je ferai deux remarques préliminaires :

1° Il suffit de faire varier x de α à $\pi + \alpha$, car il est évident qu'en dehors de cet intervalle l'équation ne sera jamais satisfaite.

2° On peut toujours supposer $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Soit en effet α' une valeur de α supérieure à $\frac{\pi}{2}$. Posons

$$\alpha' = \pi - \alpha'_1,$$

d'où

$$\alpha'_1 < \frac{\pi}{2}.$$

L'équation

$$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha')$$

deviendra

$$h \sin^4 x = -\sin(x + \alpha'_1).$$

En changeant x en $2\pi - x$, on a

$$h \sin^4 x = \sin(x - \alpha'_1),$$

ce qui nous ramène au cas $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Il suffit, d'après cela, de faire varier x de o à π, car entre π et $\pi + \alpha$ la figure montre qu'il y aura toujours une racine et une seule.

Ceci posé, prenons les logarithmes des deux membres de l'équation proposée, ce qui nous donne

$$(1) \qquad lh + 4\,l\sin x - l\sin(x - \alpha) = 0;$$

la fonction

$$\varphi = lh + 4\,l\sin x - l\sin(x - \alpha)$$

a pour dérivée

$$\frac{4\cos x}{\sin x} - \frac{\cos(x - \alpha)}{\sin(x - \alpha)} = \frac{4\cos x \sin(x - \alpha) - \sin x \cos(x - \alpha)}{\sin x \sin(x - \alpha)},$$

qu'on peut écrire, par des transformations trigonomé-

triques connues,

$$\frac{\frac{3}{2}\left[\sin(2x-\alpha)-\frac{5}{3}\sin\alpha\right]}{\sin x\sin(x-\alpha)}.$$

Pour que l'équation (1) ait plus d'une racine entre o et π, il est nécessaire que la dérivée s'annule dans cet intervalle ou que

$$\sin(2x-\alpha)=\frac{5}{3}\sin\alpha,$$

ce qui exige

$$\frac{5}{3}\sin\alpha<1$$

ou

$$\sin\alpha<\frac{3}{5}.$$

Si cette condition n'est pas remplie, il y aura une racine etu ne seule entre o et π, et par conséquent l'équation aura deux racines réelles comprises entre o et 2π.

La condition

$$\sin\alpha<\frac{3}{5}$$

étant remplie, posons

$$\frac{5}{3}\sin\alpha=\sin\beta\,;$$

β étant supposé moindre que $\frac{\pi}{2}$, ce qui est permis.

La dérivée s'annule quand on a

$$2x-\alpha=\beta \quad \text{ou} \quad 2x-\alpha=\pi-\beta,$$

c'est-à-dire pour les valeurs

$$x=\frac{\beta+\alpha}{2},\quad x=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

β étant $< \frac{\pi}{2}$, la première de ces valeurs est plus petite que la deuxième, et toutes les deux sont comprises entre α et π. Or $x = \alpha + \varepsilon$ donne pour la fonction un résultat positif et $x = \pi - \varepsilon$ un résultat négatif, ε étant une quantité positive suffisamment petite (*). Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait trois racines est que le minimum correspondant à $\frac{\beta + \alpha}{2}$ soit négatif, et que le maximum correspondant à $\frac{\pi}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2}$ soit positif. On trouve ainsi les conditions

$$h < \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin^4 \frac{\beta + \alpha}{2}}, \quad h > \frac{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\cos^4 \frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

Ces conditions sont compatibles, car les valeurs

$$lh + 4 l \sin \frac{\beta + \alpha}{2} - l \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

et

$$lh + 4 l \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - l \cos \frac{\beta + \alpha}{2}$$

étant un minimum et un maximum consécutifs, la seconde est supérieure à la première. On tire de là

$$\begin{aligned} & lh + 4 l \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - l \cos \frac{\beta + \alpha}{2} \\ & > lh + 4 l \sin \frac{\beta + \alpha}{2} - l \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \end{aligned}$$

(*) On doit observer que la fonction φ, quoique discontinue puisqu'elle devient infinie pour $x = 0$, α, π, peut être traitée ici comme une fonction continue, parce qu'on ne fait varier x que de α à π, intervalle dans lequel la fonction ne devient pas infinie.

d'où

$$\frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}}.$$

Sous les conditions précédentes, l'équation aura quatre racines réelles comprises entre o et 2π.

Le raisonnement ne serait plus applicable si les deux racines de la dérivée devenaient égales ou si l'on avait

$$\frac{\beta+\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2},$$

d'où l'on tire

$$\beta = \frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Dans ce cas, la dérivée a la racine double $\frac{\beta+\alpha}{2}$ ou $\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$; et si cette racine annule aussi la fonction

$$lk + 4l\sin x - l\sin(x-\alpha),$$

elle sera une racine triple de l'équation proposée.

On peut alors présenter les différents cas de la question dans le résumé suivant :

Premier cas. $\alpha <$ l'angle aigu ayant pour sinus $\frac{3}{5}$ ou $36^\circ 52' 11'',6$:

$$h < \frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}},\quad \text{2 racines distinctes;}$$

$$h = \frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}},$$ 4 racines dont 2 égales;

$$h > \frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos^4\frac{\beta-\alpha}{2}},\qquad h < \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}},$$ 4 racines distinctes;

$$h = \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}},$$ 4 racines dont 2 égales;

$$h > \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin^4\frac{\beta+\alpha}{2}},$$ 2 racines distinctes.

Deuxième cas. $\alpha = 36^\circ\,52'\,11'',6$:

$$h < \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)},$$ 2 racines distinctes;

$$h = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)},$$ 4 racines dont 3 égales;

$$h > \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)},$$ 2 racines distinctes.

Troisième cas. $\alpha > 36^\circ 52' 11'',6$:

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{2 racines réelles distinctes.}$$

Remarque. — La méthode que je viens d'employer est applicable dans beaucoup de cas ; elle permettra de discuter les équations

$$h \sin^m x = \sin (x - \alpha),$$
$$h \operatorname{tang}^m x = \operatorname{tang} (x - \alpha),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

SUR LA DÉVELOPPÉE DE LA PARABOLE ;

PAR M. RECOQ,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier.

Le premier membre de l'équation de la développée d'une parabole

$$27py^2 - 8(x-p)^3$$

représente, à un coefficient linéaire constant $\frac{4}{p}$ *près, le carré de la surface du triangle qui a pour sommets les pieds des trois normales issues du point* (x, y) *considéré comme étant un point quelconque du plan.*

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque du plan, en prenant pour axes la tangente et la normale au sommet de la parabole ; si S désigne la surface du triangle des pieds des trois normales issues de ces points, et (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les cordonnées des sommets, on a

$$x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'') = \pm 2\text{S},$$

ou, en substituant à x', x'', x''' les valeurs $\frac{y'^2}{2p}$, $\frac{y''^2}{2p}$, $\frac{y'''^2}{2p}$,

$$y'^2(y''-y''') + y''^2(y'''-y') + y'''^2(y'-y'') = \pm 4p\text{S},$$

ou

$$(1) \qquad (y'-y'')(y''-y''')(y'''-y') = \mp 4pS.$$

Les coordonnées y', y'', y''' sont racines de l'équation

$$y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0;$$

et comme on sait que l'équation au carré des différences de l'équation

$$y^3 + Py + Q = 0$$

admet pour terme indépendant l'expression $4P^3 + 27Q^2$, on a

$$(y'-y'')^2(y''-y''')^2(y'''-y')^2 = -4[8p^3(p-\alpha)^3 + 27p^4\beta^2],$$

c'est-à-dire, à cause de la relation (1),

$$27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 = -\frac{4}{p}S^2.$$

Applications. — I. *Lieu des points tels, que le triangle des pieds des trois normales menées de chacun d'eux à une parabole a une surface constante.*

Il est clair que ce lieu a pour équation

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3 - \frac{4S^2}{27p^2}.$$

Cette courbe présente deux inflexions aux points

$$\left\{ \begin{aligned} x &= p + \sqrt[3]{\frac{2S^2}{p}}, \\ y &= \pm \frac{2S}{3p}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose $S = 0$, elle se réduit à l'équation de la développée, ce qui devait être.

II. *Lieu des sommets des triangles* ABC *de surface*

constante circonscrits à une parabole et tels, que les normales aux trois points de contact A′, B′, C′ *se coupent en un même point.*

On sait que la surface du triangle ABC est la moitié de celle du triangle A′B′C′; la première étant constante, la seconde doit l'être, et par suite le point de rencontre (α, β) des trois normales décrit la courbe dont il vient d'être question et dont l'équation est, en appelant ici S l'aire du triangle ABC,

$$(2) \qquad 27p^2\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 p - 16S^2 = 0.$$

Il suffit donc, pour connaître le lieu des points A, B, C, d'exprimer α, β en fonction des coordonnées de l'un d'eux.

Or, soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées des trois points de contact, c'est-à-dire des pieds des trois normales issues du point (α, β) : les coordonnées y', y'', y''' sont les racines de l'équation

$$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

d'où il suit

$$y' + y'' + y''' = 0,$$
$$y'y''y''' = 2p^2\beta.$$

Or, les coordonnées du point C fourni par l'intersection des tangentes

$$yy' = p'(x + x'), \quad yy'' = p(x + x'')$$

étant

$$\begin{cases} y = \dfrac{y' + y''}{2}, \\ x = \dfrac{y'y''}{2}, \end{cases}$$

l vient, à cause des relations précédentes,

$$y = -\frac{y'''}{2},$$

$$x = \frac{p\beta}{y'''},$$

d'où, en multipliant,

$$p\beta = -2xy.$$

On connaît ainsi β en fonction des coordonnées de C.

D'autre part, on peut obtenir la valeur de $p - \alpha$ en observant qu'on a

$$2p(p-\alpha) = y'y'' + y''y''' + y'''y' = y'y'' + y'''(y' + y'')$$
$$= y'y'' - y'''^2,$$

ou $\left(\text{à cause des valeurs } x = \frac{y'y''}{2p},\ \ y = -\frac{y'''}{2}\right)$

$$p - \alpha = \frac{px - 2y^2}{p}.$$

Il reste à porter les valeurs de $p\beta$ et de $p - \alpha$ dans la relation (2) pour avoir l'équation du lieu. C'est une courbe du sixième degré,

$$2(2y^2 - px)^3 - 27p^2x^2y^2 = 4p^2S^2.$$

On peut donner à cette équation une forme qui permet de la discuter aisément ; mais il est bon d'examiner préalablement le cas particulier où $S = 0$. Alors deux des trois normales se confondent, et l'on voit que la parabole doit faire partie de la courbe ; cela se vérifie d'ailleurs par le calcul ; car, si dans l'équation

(3) $$2(2y^2 - px)^3 - 27p^2x^2y^2 = 0,$$

on fait $y^2 = 2px$, on a une identité.

Il importe maintenant de faire apparaître le facteur $y^2 - 2px$ dans le premier membre de l'équation (3)

$$2(2y^2 - px)^3 - 27p^2x^2y^2.$$

Par un calcul que nous supprimons, on trouve que l'équation (3) peut s'écrire

$$(4y^2 + px)^2(y^2 - 2px) = 0,$$

c'est-à-dire que :

Le lieu du point d'intersection des deux tangentes à une parabole menées aux deux pieds des normales issues d'un point quelconque de sa développée est une parabole dont l'équation est

$$4y^2 + px = 0.$$

On en conclut que *l'enveloppe de la droite qui joint ces deux pieds est une conique*, car ce lieu est la polaire réciproque de la courbe précédente relativement à la parabole donnée.

Cette conique est une autre parabole

$$y^2 + 16px = 0.$$

En revenant au cas général où la valeur de S est quelconque, on peut mettre l'équation du lieu sous la forme

$$(4y^2 + px)^2(y^2 - 2px) = 4p^2S^2,$$

équation facile à discuter.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 691

(voir 2e série, t. III, p. 61);

PAR MM. A. GRASSAT ET DESQ,
Élèves du lycée de Lyon.

Trouver l'équation de la surface qui est le lieu des courbes de contact des cônes ayant un point fixe pour sommet, et circonscrits aux ellipsoïdes d'un système homofocal donné. (STREBOR.)

L'équation d'un des ellipsoïdes étant

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

la courbe de contact du cône ayant le point (α, β, γ) pour sommet est représentée par cette équation et par

$$\frac{\alpha x}{a^2+\lambda}+\frac{\beta y}{b^2+\lambda}+\frac{\gamma z}{c^2+\lambda}=1.$$

On obtiendra le lieu demandé en éliminant λ entre ces deux équations, qu'on peut remplacer par les suivantes :

$$\frac{y(\alpha y-\beta x)}{b^2+\lambda}+\frac{z(\alpha z-\gamma x)}{c^2+\lambda}=\alpha-x,$$

$$\frac{x(\beta x-\alpha y)}{a^2+\lambda}+\frac{z(\beta z-\gamma y)}{c^2+\lambda}=\beta-y,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l|l} (x-\alpha)\lambda^2+y(\alpha y-\beta x) & \lambda+c^2y(\alpha y-\beta x) \\ \quad +z(\alpha z-\gamma x) & \quad +b^2z(\alpha z-\gamma x) \\ \quad +(b^2+c^2)(x-\alpha) & \quad +b^2c^2(x-\alpha) \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} (y-\beta)\lambda^2 + x(\beta x - \alpha y) & \lambda + c^2 x(\beta x - \alpha y) \\ \quad + z(\beta z - \gamma y) & \quad + a^2 z(\beta z - \gamma y) \\ \quad + (a^2 + c^2)(y - \beta) & \quad + a^2 c^2 (y - \beta) \end{array}\right\} = 0.$$

Or, quand on a deux équations

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$
$$A'\lambda^2 + B'\lambda + C' = 0,$$

le résultat de l'élimination de λ est

$$(AC' - CA')^2 = (AB' - BA')(BC' - CB').$$

Dans le cas actuel,

$$\begin{aligned} AC' - CA' &= c^2 x(x-\alpha)(\beta x - \alpha y) + a^2 z(x-\alpha)(\beta z - \gamma y) \\ &\quad + a^2 c^2 (x-\alpha)(y-\beta) - c^2 y(y-\beta)(\alpha y - \beta x) \\ &\quad - b^2 z(y-\beta)(\alpha z - \gamma x) - b^2 c^2 (x-\alpha)(y-\beta) \\ &= c^2 \{(a^2 - b^2)(x-\alpha)(y-\beta) + (\beta x - \alpha y) \\ &\qquad \times [x(x-\alpha) + y(y-\beta)]\} \\ &\quad + z[a^2(x-\alpha)(\beta z - \gamma y) - b^2(y-\beta)(\alpha z - \gamma x)]. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} AB' - BA' &= (a^2 - b^2)(x-\alpha)(y-\beta) + (\beta x - \alpha y) \\ &\quad \times [x(x-\alpha) + y(y-\beta)] \\ &\quad + z[(x-\alpha)(\beta z - \gamma y) - (y-\beta)(\alpha z - \gamma x)], \\ BC' - CB' &= c^4 \{(a^2 - b^2)(x-\alpha)(y-\beta) + (\beta x - \alpha y) \\ &\qquad \times [x(x-\alpha) + y(y-\beta)]\} \\ &\quad + z(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2)(z-\gamma)(\beta x - \alpha y) \\ &\quad + z[(a^2 - b^2) z(\beta z - \gamma y)(\alpha z - \gamma x) \\ &\quad + (b^2 - c^2) x(\alpha y - \beta x)(\alpha z - \gamma x) \\ &\quad + (a^2 - c^2) y(\beta x - \alpha y)(\beta z - \gamma y)]. \end{aligned}$$

Donc, en posant

$$(a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta)+(\beta x-\alpha y)[x(x-\alpha)+(y-\beta)]=\mathrm{P},$$
$$a^2(x-\alpha)(\beta z-\gamma y)-b^2(y-\beta)(\alpha z-\gamma x)=\mathrm{Q},$$
$$(x-\alpha)(\beta z-\gamma y)-(y-\beta)(\alpha z-\gamma x)=\mathrm{Q}',$$
$$(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)(z-\gamma)(\beta x-\alpha y)=\mathrm{R},$$
$$z(a^2-b^2)(\beta z-\gamma y)(\alpha z-\gamma x)+x(b^2-c^2)(\alpha y-\beta x)(\alpha z-\gamma x)$$
$$+y(a^2-c^2)(\beta x-\alpha y)(\beta z-\gamma y)=\mathrm{S},$$

l'équation de la surface peut s'écrire

$$(\mathrm{P}c^2+\mathrm{Q}z)^2=(\mathrm{P}+\mathrm{Q}'z)(\mathrm{P}c^4+\mathrm{R}z+\mathrm{S}z),$$
$$\mathrm{P}^2c^4+2\mathrm{PQ}c^2z+\mathrm{Q}^2z^2=\mathrm{P}^2c^4+\mathrm{P}z(\mathrm{R}+\mathrm{S})$$
$$+\mathrm{Q}'z(\mathrm{P}c^4+\mathrm{R}z+\mathrm{S}z);$$

elle se décompose donc en $z=0$, ce qui donne le plan des xy et

$$2\mathrm{PQ}c^2+\mathrm{Q}^2z=\mathrm{P}(\mathrm{R}+\mathrm{S})+\mathrm{Q}'(\mathrm{P}c^4+\mathrm{R}z+\mathrm{S}z),$$

ce qui représente une surface du sixième degré.

Sa trace sur le plan des xy est représentée par

$$2\mathrm{PQ}c^2=\mathrm{P}(\mathrm{B}+\mathrm{S})+\mathrm{PQ}'c^4,$$

qui se décompose en $\mathrm{P}=0$, c'est-à-dire

$$(a^2-b^2)(x-\alpha)(y-\beta)$$
$$+(\beta x-\alpha y)[x(x-\alpha)+y(y-\beta)]=0,$$

et

$$2\mathrm{Q}c^2=\mathrm{R}+\mathrm{S}+\mathrm{Q}'c^4,$$

c'est-à-dire

$$2c^2\gamma[b^2x(y-\beta)-a^2y(x-\alpha)]$$
$$=-\gamma(\beta x-\alpha y)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-\gamma x^2(b^2-c^2)(\alpha y-\beta x)$$
$$-\gamma y^2(a^2-c^2)(\beta x-\alpha y)+\gamma c^4(\alpha y-\beta x).$$

La première représente une strophoïde oblique pas-

sant par le point $P(\alpha, \beta)$, par ses projections Q, R sur les axes; les tangentes en P sont perpendiculaires, et l'asymptote est parallèle à OP.

La deuxième passe aussi par le point (α, β), a une asymptote parallèle à OP. Dans le cas où l'ellipsoïde donné est de révolution autour de l'axe des z, $a = b$, cette équation, qui peut s'écrire

$$\begin{gathered}2a^2c^2(\alpha y - \beta x)\\ + (\alpha y - \beta x)\left[a(x^2 + y^2)(a^2 - c^2) - a^4 - c^4 - 2a^2c^2\right] = 0,\end{gathered}$$

se décompose en

$$\alpha y - \beta x = 0,$$

c'est-à-dire la droite OP, et

$$x^2 + y^2 = \frac{a^4 + c^4}{a^2 - c^2},$$

ce qui représente un cercle ayant l'origine pour centre.

Comme cas particulier, supposons que la surface donnée est une sphère : on aura

$$\begin{aligned}R &= 3a^4(z - \gamma)(\beta x - \alpha y),\\ Q &= a^2(z - \gamma)(\beta x - \alpha y),\\ Q' &= (z - \gamma)(\beta x - \alpha y);\end{aligned}$$

S est identiquement nul,

$$P = [x(x - \alpha) + y(y - \beta)](\beta x - \alpha y),$$

et l'équation de la surface devient, en remplaçant Q et R par a^2Q' et $3a^4Q'$,

$$2a^4PQ' + a^4Q'^2z = 3a^4PQ' + Q'(a^4P + 3a^4Q'z),$$

ce qui se réduit à

$$2a^4PQ' + 2a^4Q'^2z = 0,$$

ce qui se décompose en

$$Q' = 0,$$

c'est-à-dire les deux plans

$$z - \gamma = 0,$$
$$\beta x - \alpha y = 0,$$

et

$$P + Q'z = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\beta x - \alpha y)[x(x - \alpha) + y(y - \beta) + z(z - \gamma)] = 0;$$

le lieu est donc la sphère

$$x(x - \alpha) + y(y - \beta) + z(z - \gamma) = 0,$$

qui a pour diamètre la droite joignant l'origine au point (α, β, γ).

Note. — M. E. Dubois, élève du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser), a aussi résolu la même question.

Question 720

(voir p. 48);

PAR M. CHEMIN,
Élève de l'École Polytechnique.

Soient x, y, z trois fonctions d'une variable indépendante t, satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

soient x', y', z', x'', y'', z'' leurs dérivées premières et secondes par rapport à t.

Les neuf quantités x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' vérifient identiquement l'égalité

$$AC - B^2 - A^3 = D^2,$$

dans laquelle

$$\mathrm{A} = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$
$$\mathrm{B} = x'x'' + y'y'' + z'z'',$$
$$\mathrm{C} = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$
$$\mathrm{D} = x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'').$$

(CATALAN.)

Prenons la dérivée première et la dérivée seconde de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

nous avons

$$(1) \qquad xx' + yy' + zz' = 0,$$
$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' = 0.$$

La quantité D peut s'écrire sous forme du déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Formons à la manière ordinaire le carré de ce déterminant :

$$\mathrm{D}^2 = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & xx' + yy' + zz' & xx'' + yy'' + zz'' \\ xx' + yy' + zz' & x'^2 + y'^2 + z'^2 & x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ xx'' + yy'' + zz'' & x'x'' + y'y'' + z'z'' & x''^2 + y''^2 + z''^2 \end{vmatrix}.$$

Cette quantité devient, en faisant les substitutions et remarquant que $xx'' + yy'' + zz'' = -(x'^2 + y'^2 + z'^2)$,

$$\mathrm{D}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{A} \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{vmatrix},$$

ou, en développant,

$$\mathrm{D}^2 = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^3.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solution analogue par MM. Graindorge, élève ingénieur des mines à Liége; de Virieu, professeur à Lyon; Wohlgemuth, précepteur à Rugen (Livonie); F. Richard, élève du collége Chaptal; Grassat, du lycée de Lyon; L. Cousin; Gerhardt et Joly, de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard); Maze, du lycée de Toulouse; Léon Bailly, répétiteur au lycée d'Orléans; le P. Autefage, S. J.; Rezzonico, de Morate; M. Lucien Bignon, de Lima (Pérou).

Même question;

PAR M. A. S.,
Élève de l'École Polytechnique.

L'égalité à démontrer est la traduction analytique de quelques propriétés des courbes gauches.

Nous pouvons considérer x, y, z comme les coordonnées d'un point M d'une courbe gauche située sur la sphère $x^2+y^2+z^2=1$. En effet, soit ρ le rayon de cette courbe au point M (x, y, z). Ce rayon est le même que celui de la section de la sphère par le plan osculateur de la courbe au point M. Donc il a pour valeur $\rho^2 = 1 - p^2$, p distance du centre de la sphère au plan osculateur.

Or on sait que

$$= \frac{[x(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + y(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + z(dx\,d^2y - dy\,d^2x)]^2}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2};$$

et comme

$$\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2 - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2}{ds^6}$$

$$\frac{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^3},$$

$$\frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{ds^6} = \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}^3}\cdot\frac{1}{p^2},$$

$$\frac{p^2}{\rho^2} = \frac{1-\rho^2}{\rho^2} = \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}^3},\quad \frac{1}{\rho^2} = 1 + \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{A}^3},$$

par suite

$$\frac{AC - B^2}{A^3} = 1 + \frac{D^2}{A^3}, \quad AC - B^2 - A^3 = D^2.$$

C. Q. F. D.

Note. — M. H. Violland, de Strasbourg, a démontré le théorème de M. Catalan à l'aide de considérations empruntées à la Mécanique, et où intervient aussi le rayon de courbure.

Question 733;

Par Mlle Léonide LECHAUCEY.

Si les six points P, Q, A, B, C, D *sont sur une même conique, les points d'intersection des droites* PA, QB; PB, QA; PC, QD; PD, QC *sont sur une conique qui passe par les points* P *et* Q. (Cayley.)

Soient M, N, R et S les points ainsi obtenus; le problème revient à démontrer que les points de concours des droites MN, RS; PC, QA; PA, QC sont en ligne droite.

Les pôles des droites MN et RS sont sur la droite PQ, donc cette droite est la polaire du point (MN).(RS). Or les polaires des points (PC).(AQ); (PA).(QC) se coupent sur la droite PQ, ce qui démontre que les trois points sont en ligne droite.

Note. — Solution analogue de M. Audoynaud, professeur au lycée de Poitiers.

Même question;

Par M. GAZÈRES,

Élève du lycée de Bordeaux.

Les deux faisceaux P(ABCD), Q(ABCD) sont homographiques; par suite, les faisceaux P(ABCD),

Q(BADC) le sont aussi. Donc les intersections des rayons homologues de ces deux derniers faisceaux PA, QB; PB, QA; PC, QD; PD, QC sont sur une conique passant par les points P et Q.

Note. — Solutions analogues de MM. Grassat, Autefage, Violland, Albert Parel. MM. O. Puel et Viant, du Prytanée militaire; Carrière, du lycée Louis-le-Grand, donnent en outre le théorème corrélatif déduit de la théorie des polaires réciproques. M. G. Pontou, du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant), fait voir que le point N est sur la conique (MQRTP), en s'appuyant sur ce théorème : *Lorsque trois coniques ont une corde commune, les trois autres cordes communes de ces coniques prises deux à deux passent par un même point.* Solutions analytiques de MM. Carrière, Lerosey, du collége Chaptal.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XVIII.

Chasles. — *Traité des Sections coniques,* faisant suite au *Traité de Géométrie supérieure.* Première partie. In-8° de XIV-368 pages et 5 planches; 1865. Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 9 francs.

M. Chasles vient de publier, sous le titre de *Traité des Sections coniques,* la première partie du grand ouvrage qui doit présenter, dans un enchaînement systématique, les diverses applications des principes et des procédés de démonstration exposés dans le *Traité de Géométrie supérieure,* à toutes les parties de la Géométrie pure, soit sur le plan, soit dans l'espace.

Le *Traité des Sections coniques* se composera de deux volumes; le premier paraît seul aujourd'hui (*). Les matières qu'il renferme

(*) Cet ouvrage, sorti des presses de M. Gauthier-Villars, successeur de

ont presque toutes, et plusieurs fois depuis 1846 (date de la création de la chaire de *Géométrie supérieure*), fait le sujet du cours professé par M. Chasles à la Sorbonne. Les personnes à qui il a été donné de suivre ces savantes et instructives leçons se retrouveront donc sur un terrain en partie connu par elles.

Le programme tracé dans l'*Introduction au Cours de Géométrie supérieure* est vaste. L'auteur y fait pressentir qu'il donnera successivement au public des Traités relatifs aux coniques planes, aux coniques sphériques, aux surfaces du second ordre, aux courbes planes du troisième et du quatrième degré, aux propriétés générales des courbes et des surfaces de tous les ordres, aux courbes à double courbure et aux surfaces réglées du troisième et du quatrième degré, etc. Les personnes qui s'intéressent à la Géométrie attendaient donc l'apparition du premier anneau de cette longue chaîne, avec une impatience d'autant plus légitime, qu'on savait parfaitement qu'à part quelques détails peut-être, l'auteur possédait en manuscrits les matériaux nécessaires à la réalisation de ses promesses. En effet, les leçons de la Sorbone venaient, chaque année, soulever quelque coin nouveau du voile aux auditeurs, au moins dans la mesure où leurs études préparatoires, le plus souvent incomplètes dans cet ordre d'idées, leur permettaient de suivre avec quelque profit les développements donnés par le professeur.

M. Chasles, sollicité par ce désir fréquemment exprimé, comprenait sans doute qu'il mettait quelque retard à y répondre. D'autres ouvrages ou de simples Mémoires, calqués sur ses méthodes, ou inspirés par ses écrits, faisaient d'ailleurs dans son domaine des incursions qui pouvaient ôter quelque chose au plaisir de la surprise et de la nouveauté. Mais, d'une part, des fonctions publiques très-multipliées devaient abréger singulièrement les moments que l'auteur était en mesure de consacrer au travail assidu et souvent ingrat d'une rédaction définitive, tandis que son esprit inventif, l'entraînant sans cesse vers de nou-

---

M. Mallet-Bachelier, est remarquable par la pureté et la correction du texte, ainsi que par la beauté des figures gravées.

veaux sujets, le détournait du but tracé, pour lui faire goûter le charme des découvertes. D'autre part, il voulait écrire pour la postérité, et ne graver sur l'airain qu'un texte longtemps médité et irréprochable. Les savants, comme les écrivains, qui ont en main un burin de cette trempe, sont en général peu impatients de produire leurs œuvres. Ils savent bien que, malgré leurs retards calculés, la priorité leur est rendue, partout où il est juste qu'elle le soit, et qu'ils n'ont pas besoin, pour être reconnus, de s'écrier : *Me! me! adsum qui feci!*

Le volume dont nous voudrions donner ici un rapide aperçu se divise en dix-neuf Chapitres, dont voici le sujet.

Le Chapitre I expose deux propriétés fondamentales qui se prêtent, au même titre et avec la même fécondité, aux deux genres de propositions et de déductions qui forment une théorie compléte des sections coniques, savoir : aux propriétés relatives aux points, et aux propriétés relatives aux droites et aux tangentes.

Ces deux propriétés fondamentales dérivent elles-mêmes, comme conséquence immédiate, d'un théorème unique, qui sert de base à tout l'ouvrage, et qui est ainsi conçu :

Les droites menées de quatre points a, b, c, d d'une conique, à un cinquième point quelconque, ont un rapport anharmonique égal à celui des quatre points dans lesquels les tangentes en a, b, c, d rencontrent une cinquième tangente quelconque.

Le Chapitre II fait connaître plusieurs théorèmes généraux et très-importants, qui se déduisent immédiatement des deux propriétés fondamentales. Ce sont les théorèmes de Pappus, de Desargues, de Pascal, de Carnot, et leurs corrélatifs par voie de dualité, parmi lesquels se trouve celui de Brianchon. Ce sont aussi les équations générales des sections coniques, exprimées en fonction des distances des points de la courbe à trois droites fixes ou des tangentes de la courbe à trois points fixes; c'est enfin l'équation de Descartes, bien connue par l'usage exclusif qu'on en fait dans les ouvrages désignés habituellement sous le nom de *Traités de Géométrie analytique.*

Les théorèmes dont il vient d'être question donnent lieu à divers corollaires et conséquences qui font le sujet du Cha-

pitre III. Nous citerons une solution élégante du problème fameux de la trisection de l'angle, plusieurs propriétés métriques relatives à l'hyperbole et à la parabole, la construction des coniques déterminées par cinq points ou cinq tangentes, et enfin celle du cercle osculateur en un point d'une conique, dont on connaît la tangente en ce point et trois autres points.

Le Chapitre IV est consacré à une extension des théorèmes généraux du Chapitre II. On y trouve la description organique des coniques de Newton, les théorèmes de Mac-Laurin et de Braikenridge, d'autres propositions encore plus générales qui en découlent, et dont quelques-unes sont dues, soit à ces deux géomètres, soit à M. Poncelet.

L'importante théorie des pôles et polaires, celle des points et des droites conjugués, les propriétés des quadrilatères inscrits ou circonscrits à une conique, celles relatives aux cordes d'une conique passant par un même point ou aux angles circonscrits ayant leurs sommets sur une même droite, font le sujet du Chapitre V. On y trouve d'élégants théorèmes dus à M. O. Hesse, et une explication très-claire de ce qu'il faut entendre par un *quadrilatère imaginaire* inscrit ou circonscrit à une conique. Ces quadrilatères imaginaires jouent un rôle important dans plusieurs questions, et contribuent surtout à simplifier les recherches et les démonstrations et à généraliser les énoncés.

Le Chapitre V se termine par la solution de divers problèmes relatifs à la construction de coniques déterminées par des conditions données, dans lesquelles plusieurs, par exemple quatre points ou quatre tangentes, sont imaginaires.

Le Chapitre VI traite des diamètres et du centre des coniques et de leurs diamètres conjugués. L'auteur y donne un grand nombre de relations métriques, dont plusieurs ne se rencontrent pas habituellement dans les Traités de Géométrie analytique.

Le Chapitre VII apprend à mener, par un point, des normales à une conique, ou des obliques sous un angle donné. La solution est amenée par la démonstration préalable de plusieurs théorèmes intéressants, qui sont la conséquence de l'égalité du

rapport anharmonique de quatre points en ligne droite et de celui des polaires de ces points.

Le Chapitre VIII a pour objet la théorie des divisions homographiques sur une conique. M. Chasles appelle ainsi deux séries de points pris sur la courbe, tels, que les droites menées de ces points à un autre point de la conique forment deux faisceaux homographiques. La considération de ces divisions est utile dans plusieurs questions, notamment dans la théorie des coniques qui ont un double contact. Elle fournit aussi une solution intuitive des deux problèmes suivants, résolus pour la première fois par M. Poncelet :

1° *Inscrire dans une conique un polygone dont tous les côtés passent par autant de points donnés ;*

2° *Circonscrire à une conique un polygone dont les sommets soient situés sur autant de droites données.*

Le Chapitre IX expose la théorie des courbes polaires réciproques, et celle des coniques homographiques et homologiques. On y trouve de nombreuses relations de segments, utiles dans les applications. C'est par la considération des coniques homologiques que l'auteur introduit, de la manière la plus simple et la plus naturelle, dans le Chapitre X, la notion des *foyers*, et parvient à démontrer, sans calculs, toutes les propriétés descriptives ou métriques de ces points. Le problème dont la solution sert de point de départ dans cette branche de la théorie des coniques est le suivant :

Une conique étant donnée, on demande de déterminer le centre d'homologie, de manière que la conique homologique soit un cercle.

Il y a deux solutions, et les deux centres d'homologie ainsi trouvés sont les foyers.

Quelques géomètres, et à leur tête M. Plücker, à qui cette conception est due (1833), définissent les foyers en disant que *ces points sont les deux sommets réels du quadrilatère imaginaire circonscrit à la courbe, et dont les points de concours des côtés*

opposés sont les deux points imaginaires situés à l'infini sur un cercle. Cette notion, qui sous un énoncé peu différent a l'avantage de s'appliquer aux courbes d'un ordre quelconque, ne pouvait servir de définition dans une théorie des coniques bien ordonnée. Mais il était utile de ne pas la passer sous silence, car elle est féconde et procure des démonstrations intuitives de certaines questions, particulièrement dans la théorie des coniques homofocales. L'auteur fait connaître les considérations par lesquelles elle se trouve le plus naturellement amenée.

Le Chapitre XI résout diverses questions ayant pour objet de faire la perspective ou la figure homologique d'une conique lorsqu'un ou deux points donnés deviennent les foyers de la nouvelle courbe.

Les théorèmes de Steiner, de Lamé, et divers autres relatifs aux propriétés d'involution de plusieurs coniques circonscrites ou inscrites à un quadrilatère, font l'objet du Chapitre XII. On y voit ce qu'il faut entendre par le rapport anharmonique de quatre coniques circonscrites à un même quadrilatère, notion fort utile dans la théorie des courbes du troisième et du quatrième ordre.

Le Chapitre XIII traite des cordes communes à deux coniques ou *axes de symptose* et fait connaître leur construction dans tous les cas. Ce sujet, qui jusqu'ici avait laissé beaucoup à désirer, au point de vue de la simplicité et même de la rigueur des démonstrations, est traité de main de maître. On en peut dire autant du Chapitre XIV, où il est question des points de concours des tangentes communes à deux coniques, ou *points ombilicaux*.

Le Chapitre XV fait connaître les relations qui existent entre les cordes communes et les ombilics de deux coniques. On y trouve une démonstration rigoureuse de cette belle proposition due à M. Poncelet, savoir :

Deux coniques quelconques sont deux figures homologiques, dans lesquelles l'axe d'homologie est une corde commune et le centre d'homologie est un ombilic correspondant à cette corde.

Le même Chapitre traite des coniques homothétiques, et fait connaître leur construction dans divers cas donnés. Il se termine par la solution générale de ce problème difficile, que Desargues paraît avoir résolu le premier, mais par d'autres méthodes :

Étant données deux coniques, en faire la perspective, de manière qu'elles deviennent deux coniques homofocales, ou deux cercles, ou deux hyperboles équilatères ayant un foyer commun, ou deux paraboles ayant un foyer commun, etc.

Le Chapitre XVI renferme les propriétés de trois et de quatre coniques passant par quatre mêmes points ou tangentes à quatre mêmes droites, et le Chapitre XVII des théorèmes généraux relatifs aux points d'intersection de trois coniques quelconques et aux tangentes communes à ces courbes prises deux à deux. Enfin le Chapitre XVIII contient aussi des propriétés très-variées, dont la plupart n'étaient pas connues, relatives à des coniques circonscrites ou inscrites à un même quadrilatère.

Ces trois Chapitres sont peu susceptibles d'être analysés, à cause de la diversité des propositions. Ils sont fort importants et auront de nombreuses applications dans diverses théories, et notamment dans celle des coniques homofocales. Parmi les nombreux théorèmes qu'ils contiennent, nous citerons, par exemple, les deux suivants :

1° *Quand deux coniques sont inscrites dans un quadrilatère, les huit points de contact sont sur une même conique, et les tangentes menées aux deux coniques données, par chaque point de celle-ci, forment un faisceau harmonique;*

2° *Quand deux coniques sont circonscrites à un même quadrilatère, leurs tangentes aux sommets des quadrilatères sont huit tangentes d'une même conique, et chacune des tangentes de cette conique est divisée harmoniquement par les deux coniques données.*

Le Chapitre XIX, qui termine le volume, traite des coniques ayant un double contact. La théorie des divisions homogra-

phiques sur une conique, exposée dans le Chapitre VIII, trouve ici d'importantes applications, et fournit des démonstrations intuitives de théorèmes qui semblent difficiles. Nous citerons au hasard le suivant :

Si un angle de grandeur donnée tourne autour de son sommet situé sur une conique, les cordes que cet angle intercepte dans la courbe enveloppent une conique qui a un double contact avec la proposée; les deux points de contact (imaginaires) sont toujours les mêmes, quelle que soit la grandeur de l'angle.

Le § IV de ce Chapitre contient une théorie approfondie des coniques inscrites à deux coniques. L'auteur y donne la solution de plusieurs problèmes relatifs à la construction de coniques devant avoir un double contact avec une ou deux coniques données. Enfin, le § V fait connaître les propriétés relatives à trois coniques inscrites dans une même conique. Ces propriétés sont intéressantes et ont une analogie frappante, que l'auteur fait ressortir, avec celles des cercles, notamment en ce qui concerne la construction d'une conique tangente à trois autres et celle d'un cercle tangent à trois cercles. C'est qu'en effet on peut transformer l'un des systèmes dans l'autre.

Telle est l'analyse succincte des matières extrêmement variées que contient la première partie du *Traité des Sections coniques*. Dans la deuxième, dont nous souhaitons la prompte publication, il reste à traiter des coniques homofocales, des faisceaux et réseaux de coniques, des propriétés où apparaissent des courbes d'ordre supérieur, de celles qui sont relatives aux fonctions elliptiques, etc., et à exposer cette vaste et belle théorie des systèmes de coniques assujetties à quatre mêmes conditions quelconques, qui est la plus récente et certainement une des plus remarquables créations de M. Chasles.

Ainsi complété, le *Traité des Sections coniques* prendra, dans la Géométrie moderne, le rang qu'occupait, dans l'antiquité, celui d'Apollonius, avec toute la supériorité que comportent les perfectionnements apportés dans la science par les efforts des siècles écoulés. Espérons qu'on lui donnera aussi le même

rang qu'avait jadis dans l'enseignement de la jeunesse l'ouvrage du célèbre géomètre grec.

Écrit à la manière des anciens, comme l'était déjà le *Traité de Géométrie supérieure*, le nouvel ouvrage de M. Chasles l'emporte, selon nous, sur ce dernier par l'ordre, la clarté et l'enchaînement des matières, par la sobriété des détails, par la concision des raisonnements, enfin par la pureté du style. Cette supériorité peut d'ailleurs tenir à la nature même du sujet, qui présentait plus d'unité.

Dans le *Traité de Géométrie supérieure*, l'auteur avait à exposer un système encore très-peu connu, à faire adopter des dénominations nouvelles; à écarter, comme indirects et impropres à une exposition didactique, des procédés de démonstration et de transformation justement accrédités, à prouver enfin la fécondité des méthodes nouvelles, l'uniformité de leur emploi, la portée de leurs applications. Il fallait, sinon combattre, du moins un peu plaider, et on se trouvait ainsi nécessairement entraîné à quelques digressions, instructives toujours, mais parfois un peu contraires à la pureté de la forme.

Ici il en est autrement. Les méthodes de l'auteur sont connues, ses appellations sont admises dans la science. Il n'a plus à en faire la présentation, ni en quelque sorte à excuser leur audace. Comme Euclide, il entre en matière par quelques lignes de définitions, et présente dès la première page le théorème qui sert de base à tout l'édifice. Il s'avance alors à travers son sujet, avec le calme et la majesté de la vérité pure, avec l'assurance que donne la force, mais en même temps avec l'élégance qui la dissimule et la rend attrayante, avec la sobriété et la discrétion que le goût inspire, ne cueillant dans chaque matière que la fleur, et justifiant ainsi à tous égards cet heureux parallèle qu'un de nos plus illustres Académiciens (*) faisait un jour en disant de l'auteur qu'il est « le La Fontaine des Mathématiques ».

E. de Jonquières.

Saïgon (Cochinchine), 14 mai 1865.

(*) M. J. Liouville.

XIX.

Breton (de Champ), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — *Traité du lever des plans et de l'arpentage*, précédé d'une Introduction qui renferme des notions sur l'emploi pratique des logarithmes, la Trigonométrie, l'Algèbre et l'Optique. In-8° de xxxii-596 pages et 9 planches. Paris, 1865; Gauthier-Villars. — Prix : 7 fr. 50 c.

La *Table des matières* placée en tête de l'ouvrage a une étendue de 22 pages. L'*Introduction*, de 180 pages, renferme des notions sur l'emploi *pratique* des *logarithmes* considérés comme un outil : c'est à peu près ainsi que les ouvriers intelligents parviennent à se servir très-utilement de la *règle à calcul*, qui n'est autre chose qu'une table de logarithmes; des notions sur la *Trigonométrie*, qui est indispensable pour former la triangulation d'un terrain de quelque étendue et éviter les erreurs inhérentes aux constructions graphiques; des notions sur l'*Algèbre*, pour aider surtout à comprendre les formules trigonométriques; enfin, une théorie très-complète des instruments d'optique dont on fait usage dans les opérations sur le terrain. L'auteur emploie les formules et les principes donnés en 1840 par l'illustre Gauss dans ses *Recherches dioptriques*, et jusqu'à présent fort peu répandus en France, malgré les avantages considérables qu'ils présentent. Il fait connaître le moyen pratique trouvé par notre célèbre physicien, M. Léon Foucault, pour éprouver le degré de perfection d'un appareil optique sans le démonter.

Le Livre I est consacré aux opérations élémentaires, telles que le tracé des lignes droites sur le terrain, soit au moyen de simples jalons, soit avec le secours d'un instrument spécial comme pour les grands alignements des chemins de fer; la mesure des distances soit avec la *chaîne*, soit sans *chaînage*, au moyen de l'instrument appelé *stadia;* la mesure des *angles* et leur construction sur le terrain. Ce Livre est terminé par les règles que

fournit le calcul des probabilités pour combiner entre eux de la manière la plus avantageuse les résultats de plusieurs mesures lorsqu'ils présentent des différences qu'on puisse attribuer à l'incertitude inhérente au procédé que l'on a employé.

Le Livre II expose les divers procédés usités pour les *levers de plans*. Ils y sont décrits avec tous les détails nécessaires pour mettre le lecteur à même de surmonter les diverses difficultés que présentent toujours les opérations sur le terrain. Tout ce qui concerne la connaissance des instruments est traité avec un soin particulier. Le dessin des plans est l'objet de quelques indications qui ne seront pas inutiles.

L'auteur a consacré le Livre III à ce qu'il appelle l'*arpentage*. Il comprend sous ce nom d'abord toutes les petites opérations géométriques qu'il faut savoir exécuter sur le terrain, et dont il est nécessaire de posséder des solutions assez diversifiées pour n'être jamais embarrassé; ensuite tout ce qui concerne la mesure des contenances, les partages de terrains dans des conditions données, la conversion des anciennes mesures en mesures nouvelles, et réciproquement, etc.

Le Livre IV et dernier a pour objet les opérations dites *de précision*. On y trouve un exemple de triangulation traité très-complétement et par une méthode telle, qu'on peut se rendre compte du degré de précision qu'on peut espérer de mesures obtenues dans des conditions assignées. Il y a dans ce Livre des indications que l'on chercherait vainement dans d'autres ouvrages.

XX.

Rubini (R.), Professeur à Naples. — Elementi... *Éléments de Géométrie analytique*. Première partie : Géométrie plane. In-8° de VI-472 pages. Naples, 1865.

Dans sa préface l'auteur s'excuse, pour ainsi dire, d'avoir donné dans son Traité une si grande place aux coordonnées cartésiennes, ainsi qu'à la construction des formules et des équations. Cela, dit-il, peut paraître étrange (*strano*) depuis la

publication de l'œuvre très-précieuse de M. Salmon, où, pour la première fois, on a introduit dans les éléments de Géométrie analytique les systèmes modernes de coordonnées; mais M. Rubini se justifie par des raisons qui ne nous semblent point mauvaises. « Les coordonnées cartésiennes sont les seules qui se prêtent exclusivement au développement des questions de Mécanique, par la raison naturelle que les mouvements ne peuvent avoir lieu que suivant certaines directions et autour de certains axes ou de certains points. D'un autre côté, les formules élémentaires, les métriques principalement, n'ont pas, en général, dans les nouveaux systèmes, la même simplicité que leurs similaires dans le système cartésien. Ce dernier donne aussi les formules les plus simples dans le calcul infinitésimal, où jusqu'à présent les nouveaux systèmes n'ont pas montré toute leur puissance.... Un des principaux avantages qu'offre une méthode de coordonnées, c'est de conduire directement à la solution d'un problème géométrique, sans recourir aux propriétés de lieux géométriques déjà étudiés. La raison en est qu'une telle méthode, et principalement avec les coordonnées cartésiennes, offre toutes les formules projectives ou métriques qui servent à exprimer analytiquement les conditions géométriques du problème. Pourquoi donc n'en pas tirer profit? » Tel est le plaidoyer de M. Rubini. Cependant le savant géomètre ne méconnaît pas l'importance des nouveaux systèmes, et on en trouve dans son livre une excellente exposition. Il ne faut en effet mépriser aucune méthode. Le bon ouvrier se sert de tous les outils; mais il ne cache pas sa préférence pour les plus simples, pour ceux qu'il manie avec le moins d'effort.

DE LA PROJECTION GAUCHE;

PAR M. ABEL TRANSON.

I. Je suppose que pour projeter les différents points d'une figure on emploie des lignes droites assujetties à rencontrer deux droites fixes. On aura ce qu'il me paraît assez naturel d'appeler une *projection gauche*. A la vérité, ce nom conviendrait encore si les deux directrices, ou seulement l'une d'elles, étaient des lignes courbes; mais le système où les deux directrices sont rectilignes, étant le seul dans lequel à un point projeté correspond un point unique du tableau, semble à cause de cela mériter une considération particulière. On remarquera d'ailleurs que la projection gauche donne lieu à la projection conique quand les directrices se rencontrent, et à la projection cylindrique quand elles sont parallèles.

J'appellerai *tableau* le plan sur lequel se fait la projection, et *plan primitif* celui de la figure que l'on projette. Je désignerai par A et B les pieds des directrices sur le plan primitif; par A' et B' leurs pieds sur le tableau, et par L l'intersection des deux plans (*).

L est rencontrée par la ligne AB en un point l, et par A'B' en un point l'. On verra que ces deux points jouent un grand rôle dans le système.

II. Une droite du plan primitif se projette en général selon une conique, et il est aisé de voir que cette conique passe par les trois points A', B' et l. Un quatrième point est

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

à la rencontre de la droite donnée avec L; un cinquième sera le point qui lui correspond sur la *ligne de fuite*.

J'entends par *ligne de fuite* la projection sur le tableau de tous les points à l'infini du plan primitif. C'est manifestement l'intersection du tableau par le paraboloïde hyperbolique ayant pour directrices rectilignes celles mêmes du système, et pour plan directeur le plan primitif.

Pour avoir le point de la ligne de fuite qui répond à une droite donnée du plan primitif, on mènera à celle-ci par A et B deux parallèles qui rencontreront L aux points α et β; les lignes du tableau $A'\alpha$ et $B'\beta$ se rencontreront en γ qui sera le point demandé, le cinquième point de la conique suivant laquelle se projette la droite donnée.

III. Supposons qu'on ait construit les points de fuite $\gamma, \gamma', \ldots$, relatifs à toutes les directions de lignes situées dans le plan primitif. Alors les couples de points α, β; α', β'; etc., qui répondent aux couples de parallèles $A\alpha$, $B\beta$; $A\alpha'$, $B\beta'$; etc., forment sur L deux divisions homographiques dont l est un des points doubles. Le second étant à l'infini, il suit de là que les points $\gamma, \gamma', \ldots$, qui sont sur le tableau à la rencontre des couples de droites $A'\alpha$, $B'\beta$; $A'\alpha'$, $B'\beta'$;..., sont sur une hyperbole ou sur une parabole, ainsi que cela résultait *à priori* de la propriété de la ligne de fuite d'être l'intersection d'un paraboloïde hyperbolique par le plan du tableau. Mais, de plus, on remarquera que cette hyperbole ou parabole passe par A', B' et l, aussi bien que la projection gauche de toute droite du plan primitif. Donc il est permis de considérer la ligne de fuite comme la projection d'une certaine droite de ce plan.

Il suit de là que le principe introduit dans la science par la considération de la projection centrale, savoir que :

les points à l'infini d'un plan sont sur une droite; cette sorte d'aphorisme qui, pris à la lettre, serait inexact vu que la situation relative d'une suite de points à l'infini est par elle-même indéterminée, mais qui exprime commodément un fait géométrique; cet aphorisme ou ce principe demeure applicable à la projection gauche, ce qu'à la vérité et dans quelque mesure on aurait pu prévoir, puisque la projection gauche renferme comme cas particulier la projection centrale.

IV. Si la droite du plan primitif passe par le pied de l'une des directrices, comme serait la droite $A\alpha$ qui rencontre L au point α, sa projection gauche se composerait de deux droites, savoir $A'\alpha$, et $B'l$, celle-ci commune évidemment à toutes les droites primitives qui passent par A.

De même, la droite primitive $B\beta$ se transforme en un système de second ordre composé de la droite $B'\beta$ qui varie avec β, et de $A'l$ qui en est indépendante.

Quant à la projection de toute droite primitive passant par le point l, ce serait une conique tangente à la droite L en ce même point l.

Enfin, par réciprocité, toute conique du tableau, si elle passe par les points A', B' et l, répond à une droite du plan primitif qu'il sera facile de déterminer en ayant égard à ce qui précède. Car cette conique rencontrera L en un second point qui, considéré comme étant sur le plan primitif, appartient à la droite en question, et de plus elle, cette conique, rencontre la ligne de fuite en un quatrième point qui, étant la projection du point de cette même droite situé à l'infini, en fera connaître la direction.

V. Si on considère sur le plan primitif un faisceau de droites issues d'un point D, les coniques correspon-

dantes formeront sur le tableau un faisceau de base (A', B'l, D') (*), en appelant D' la projection gauche du point D. D'ailleurs ce faisceau de coniques sera homographique à celui des droites primitives. En effet, chaque droite primitive Dδ détermine une et une seule conique du faisceau, et par suite elle détermine aussi la tangente de cette conique en un quelconque des quatre pivots de la base, par exemple en D'. De même la tangente en D' à l'une des coniques du faisceau détermine cette conique, et par suite détermine la droite primitive correspondante, soit la droite Dδ. Or, cette détermination réciproque entraîne, comme on sait, l'homographie des deux faisceaux.

VI. Par les principes de la projection gauche on pourra évidemment transformer tout théorème n'impliquant que des lignes droites en un autre dans l'énoncé duquel les droites seront remplacées par des coniques passant par trois points fixes. Il suffira de citer l'exemple suivant :

Théorème. — *Si deux faisceaux homographiques de coniques ayant pour bases respectives* (α, A, B, C) *et* (β, A, B, C) *sont tellement placés, que la conique des cinq points* α, β, A, B, C, *étant considérée comme appartenant au premier faisceau, soit elle-même son homologue dans le second, les autres coniques du premier faisceau rencontreront respectivement leurs homologues en des points situés sur une nouvelle conique passant elle-même par les trois points* A, B, C.

La vérité de ce théorème résulte sans autre examen de sa corrélation avec la propriété connue de deux faisceaux

(*) On sait que M. Chasles appelle *faisceau* l'ensemble des coniques qui passent par quatre points, et *base* du faisceau l'ensemble de ces quatre points.

de droites qu'on suppose homographiques et tellement placés, que la ligne qui joint leurs centres, considérée comme rayon de l'un d'eux, soit en même temps son homologue dans l'autre.

VII. A l'aide des mêmes principes on pourra, de toutes les propriétés appartenant à des courbes d'un ordre donné, faire sortir des propriétés relatives à des courbes d'ordre supérieur.

Ainsi les courbes du second ordre se transformeront en courbes du troisième ou du quatrième ordre; car si on fait premièrement la projection gauche d'une telle courbe en plaçant hors de son périmètre les pieds A et B des deux directrices, une droite quelconque du tableau correspondra sur le plan primitif à une conique passant par les points A, B et l', laquelle coupe nécessairement la conique primitive en quatre points qui sont ou réels, ou imaginaires par couples; et ces points eux-mêmes répondent aux rencontres sur le tableau de cette droite et de la projection gauche de la conique primitive; cette projection est donc une courbe du quatrième ordre.

En second lieu, si le pied de l'une des directrices est placé sur le périmètre de la conique primitive, la projection sera, comme il est aisé de le voir, une courbe du troisième ordre, ou mieux le système d'une telle courbe et d'une ligne droite.

Si les deux pieds des directrices sont sur le périmètre de la conique primitive, sa projection sera une nouvelle conique ou plutôt un système du quatrième ordre formé de cette conique et des deux droites $A'l$, $B'l$.

Enfin, les deux pieds A et B des directrices étant sur le périmètre de la conique, s'il arrive que le point l', qui est à la rencontre de $A'B'$ avec l'intersection du plan primitif et du tableau, soit aussi sur ce même périmètre,

la projection de la conique proposée sera manifestement une ligne droite.

Généralement la projection gauche d'une courbe de l'ordre n sera de l'ordre $2n$, $2n-1$, $2n-2$ ou enfin $2n-3$, selon que son périmètre ne rencontrera aucun des trois points A, B, l', ou en rencontrera un ou deux, ou enfin les rencontrera tous les trois.

VIII. Comme application de ces principes, faisons la projection gauche de la figure dans laquelle une conique est engendrée par la rencontre de deux faisceaux rectilignes homographiques.

On aura sur le tableau la génération d'une courbe du quatrième ordre par les rencontres des coniques homologues appartenant à deux faisceaux *quadriques* homographiques, ayant à leurs bases trois points communs.

Cela suppose que les points A, B et l' du plan primitif soient hors du périmètre de la conique engendrée par les deux faisceaux rectilignes.

De même on aura pour les courbes du troisième ordre une génération par la rencontre des éléments homologues de deux faisceaux homographiques dont l'un rectiligne et l'autre quadrique, si le centre du faisceau rectiligne est l'un des quatre pivots de la base du faisceau quadrique. En effet, ces deux faisceaux peuvent être considérés comme la projection gauche de la génération d'une courbe du second ordre par les rencontres des éléments homologues de deux faisceaux rectilignes homographiques, pourvu qu'on place le pied de l'une des directrices au centre de l'un de ces faisceaux.

IX. Comme seconde application, on peut montrer que la propriété des courbes du troisième ordre, d'avoir trois points d'inflexion en ligne droite, se lie à une propriété des courbes du second ordre.

On sait, en effet, qu'en un point A quelconque d'une conique passent trois cercles qui sont osculateurs de la conique en trois autres points B, C, D et de plus que les quatre points A, B, C, D sont eux-mêmes sur un quatrième cercle. (Théorème de feu Joachimsthal.)

Par la projection centrale et par le principe de continuité de M. Poncelet, ce théorème subit une première transformation et devient cette propriété générale des sections coniques :

Par un point A *du périmètre d'une conique* S *et par deux points* a *et* b *de son plan on peut faire passer trois coniques ayant avec la première un contact du second ordre en des points distincts* B, C, D; *de plus, les six points* A, B, C, D, a, b *sont sur une même conique.*

Faisons une projection gauche de la figure qui convient à ce théorème, en ayant soin que les points A, a, b coïncident avec les pieds des deux directrices et avec le point l'.

La conique S devient sur le tableau une courbe du troisième ordre; les trois coniques osculatrices s'y transforment en des lignes droites puisqu'elles passent par les pieds des directrices et par le point l', et chacune de ces droites touche la cubique selon un contact du second ordre, c'est-à-dire en un point d'inflexion. Et ces trois points d'inflexion sont en ligne droite, puisque la conique des six points est elle-même transformée en une ligne droite.

X. Dans un Mémoire publié en 1831 dans le *Journal de Crelle*, sous le titre de *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de Géométrie,* M. Magnus (de Berlin) se propose de trouver pour les figures planes des formules de transformation telles, qu'à un point de la figure transformée corresponde un point unique de la

transformante, et réciproquement. Pour cela, appelant x et y les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de l'une des deux figures; appelant u et t celles du point correspondant de l'autre, il remarque qu'il doit y avoir entre ces quantités deux équations qui soient seulement du premier degré par rapport à x et y, aussi bien que par rapport à u et t. Représentant donc par A, A', A'', B, B' et B'' six fonctions du premier degré en x et y, de sorte, par exemple, que l'on ait $A = ax + by + c$, les deux équations en question sont nécessairement de la forme

$$Au + A't + A'' = o, \quad Bu + B't + B'' = o,$$

d'où on déduit

$$u = \frac{A'B'' - A''B'}{AB' - A'B}, \quad t = \frac{A''B - AB''}{AB' - A'B}.$$

Maintenant, supposons qu'on ait un lieu géométrique exprimé en u et t; les substitutions de ces valeurs donneront l'équation en x et y de ce lieu transformé.

Il est aisé de voir qu'une ligne droite devient par cette transformation une section conique, et plus généralement qu'une courbe du degré n devient une courbe du degré $2n$, à moins que l'ordre ne s'abaisse par quelques relations particulières entre les constantes des formules et les paramètres de la courbe primitive.

M. Magnus fait voir, par rapport à la transformation des lignes droites, que les coniques correspondantes passent toutes par trois points fixes qu'il appelle *les trois points fondamentaux* du plan transformé, etc.

On reconnaît à ces résultats les propriétés de la projection gauche. C'est que cette sorte de projection réalise géométriquement la transformation dont M. Magnus a donné les formules analytiques, parce qu'elle offre la cir-

constance requise par le géomètre de Berlin, savoir, qu'à chaque point de la figure transformée corresponde un point unique de la figure transformante, et réciproquement.

A la vérité, les formules de M. Magnus offrent plus de généralité en ce que deux des trois points fondamentaux peuvent y être des points imaginaires conjugués, au lieu que les trois points A, B, l' de la projection gauche sont nécessairement réels. Mais les résultats obtenus par nos principes pourront toujours, à l'aide du principe de continuité de M. le général Poncelet, être portés au même degré de généralité que ceux de M. Magnus.

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE, AVEC APPLICATIONS AUX SECTIONS CONIQUES;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie, Sous-Directeur de la fonderie de Toulouse.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — *Considérations générales et notions préliminaires.*

Une même idée se retrouve au fond des travaux les plus remarquables de notre époque, au fond de toutes ces belles recherches, dans lesquelles d'illustres savants ont tour à tour tiré si bon parti des méthodes projectives, des méthodes de déformation ou de transformation des figures, des lois de dualité ou des modes de conjugaison; cette idée, j'essayerai de la dégager et de la définir nettement en l'appelant l'idée féconde de la *Géométrie comparée*.

En restant, pour abréger, dans le domaine de la Géométrie plane, qu'on imagine que deux points, ou un point et une droite, ou deux droites, soient liés par une loi invariable permettant de trouver l'un des éléments quand l'autre est donné, on pourra faire de cette loi ou mode de conjugaison de deux éléments la base d'une méthode de Géométrie comparée. Il suffira, en effet, de considérer une ligne déterminée comme la directrice d'un point, ou comme l'enveloppe d'une droite, pour faire naître une seconde ligne dont les points ou les tangentes se déduiront des points ou des tangentes de la première par la loi de conjugaison établie.

Les méthodes de Géométrie comparée peuvent donc, comme les lois ou modes de conjugaison, varier à l'infini. Lorsque le mode de conjugaison appartient à la Géométrie de la règle et du compas, c'est-à-dire lorsqu'il se traduit en une construction réalisable avec ces instruments, la Géométrie comparée peut souvent fournir à la pratique des moyens commodes pour ramener le problème de la construction d'une ligne déterminée par certaines conditions à la construction d'une ligne conjuguée plus simple, de laquelle la première se déduit ensuite par la loi de conjugaison.

C'est ainsi que je ferai voir, dans la seconde Partie de cette Étude, qu'une conique peut, suivant certains modes simples de conjugaison, se traduisant en des constructions géométriques faciles, être considérée soit comme la conjuguée d'une droite, soit comme la conjuguée d'un point.

Je ne crains pas de dire qu'on est en droit d'attendre plus encore des ressources fécondes de la Géométrie comparée. Je pourrais montrer dans l'analyse transcendante de belles méthodes dont les points de départ appartiennent en propre à ce genre de Géométrie, auquel le Calcul

intégral devra peut-être un jour les solutions dont sont susceptibles ses problèmes les plus épineux. Mais je n'examinerai pas ici ce sujet.

La valeur d'une méthode de Géométrie comparée dépend absolument du choix plus ou moins heureux de la loi de conjugaison. Assez généralement, la loi s'établit en faisant intervenir une figure fixe qu'on peut nommer *figure de référence*. Ainsi, pour ne citer qu'un exemple bien connu, dans la méthode des polaires réciproques, qui est une méthode de Géométrie comparée empruntant son nom à la propriété principale des lignes conjuguées qu'on y fait naître, la figure de référence est une conique, les éléments conjugués sont un point et une droite, la loi de conjugaison est établie par la condition que le point est le pôle de la droite relativement à la conique.

Ce Mémoire contiendra l'étude des méthodes de Géométrie comparée dans lesquelles j'emploie le triangle comme figure de référence et, comme lois ou modes de conjugaison de deux points, d'un point et d'une droite, ou de deux droites, certaines lois simples qui paraissent douées de conséquences heureuses, principalement dans les applications aux sections coniques.

Je serai naturellement conduit, par la nature de la figure de référence que j'emploie, à faire un certain usage du système de coordonnées trilitères ou trilinéaires dont nous devons, en France, la connaissance aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*Nouvelles Annales*, 1859, *Bulletin de Bibliographie*, p. 67).

Dans ce système de coordonnées, un point est déterminé par ses distances à trois droites quelconques, dont le triangle est nommé triangle de référence. La règle des signes peut s'énoncer très-simplement ainsi : la distance est positive ou négative selon que le point et le triangle

de référence sont ou ne sont pas situés du même côté de la droite.

Il existe nécessairement une équation de condition entre les coordonnées (t, u, v) d'un point quelconque. Soient ABC le triangle de référence, S sa surface, R le rayon du cercle circonscrit ; l'équation de condition peut s'écrire de l'une ou de l'autre de ces deux manières :

$$ta + ub + vc = 2S,$$

$$t \sin A + u \sin B + v \sin C = 2R \sin A \sin B \sin C.$$

Il sera bon de remarquer les équations suivantes, écrites dans ce système de coordonnées.

Équation d'une droite quelconque :

$$t\alpha + u\beta + v\gamma = 0;$$

l'équation

$$ta + ub + vc = 0$$

représente une droite située à l'infini.

Équation d'une conique circonscrite au triangle de référence :

$$\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{u} + \frac{\gamma}{v} = 0;$$

l'équation

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v} = 0$$

représente le cercle circonscrit.

Équation d'une conique inscrite au triangle de référence :

$$t^2\alpha^2 + u^2\beta^2 + v^2\gamma^2 - 2tu\alpha\beta - 2tv\alpha\gamma - 2uv\beta\gamma = 0.$$

Pour établir les lois ou modes de conjugaison dont je ferai usage, j'aurai à me servir de deux genres de faisceaux de quatre droites : 1° le faisceau harmonique, bien

connu; 2° un faisceau que je nommerai *faisceau d'inversion*, dont la définition sera donnée dans le paragraphe suivant, et qui, soit dit en passant, n'est pas, comme le faisceau harmonique, doué de la propriété projective.

§ II. — *Faisceau d'inversion.*

Je nommerai *faisceau d'inversion* un faisceau formé par deux systèmes de droites dont les bissectrices coïncident, et *droites inverses* deux rayons conjugués de ce faisceau. Lorsqu'on prend pour axes deux rayons conjugués, les deux autres ont des coefficients angulaires inverses; de là ces dénominations.

En Géométrie, les deux tangentes ménées d'un point à une section conique et les deux droites menées de ce point aux deux foyers forment un faisceau d'inversion. En Physique, deux rayons incidents en un même point d'une surface, et situés dans le plan normal à la surface en ce point, forment avec les rayons réfléchis un faisceau d'inversion dans lequel le rayon incident et le rayon réfléchi sont conjugués.

Pour abréger le discours, parlant d'une droite qui passe par le sommet d'un angle, j'appellerai, sans autre explication, *inverse* de cette droite le quatrième rayon du faisceau d'inversion déterminé par les côtés de l'angle, pris pour rayons conjugués, et par la droite donnée. Je dirai, ainsi, que la bissectrice d'un angle est sa propre inverse.

§ III. — *Mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire.*

Lorsque trois droites, issues des trois sommets d'un triangle, se coupent en un même point, il en est de même des trois droites inverses.

Les deux points ainsi conjugués seront nommés *points inverses.*

Le produit des distances de deux points inverses à l'un quelconque des trois côtés du triangle de référence est le même.

Soit le point (t', u', v'). Les droites de jonction de ce point aux trois sommets du triangle sont

$$tv' - vt' = 0, \quad uv' - vu' = 0, \quad tu' - ut' = 0.$$

Les inverses de ces trois droites, qui sont

$$tt' - vv' = 0, \quad uu' - vv' = 0, \quad tt' - uu' = 0,$$

se coupent en un même point; et si l'on représente ce point par (t'', u'', v''), on aura

$$t' t'' = u' u'' = v' v''.$$

Voici maintenant quelques propriétés des points inverses qu'il faut remarquer et dont on trouvera facilement les démonstrations.

Deux points inverses peuvent toujours être regardés comme les deux foyers d'une conique inscrite au triangle de référence.

La droite qui joint deux points et celle qui joint les deux inverses sont vues d'un sommet du triangle sous le même angle, ou sous des angles supplémentaires.

Les angles A' *et* A'', *sous lesquels un côté a du triangle de référence est vu de deux points inverses, satisfont toujours à l'une des quatre équations*

$$\tang(A' \pm A'') \pm \tang A = 0.$$

Il est à remarquer que le mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire se traduit en une construction géométrique très-facile de l'un des points quand

l'autre est donné : on a simplement à construire deux fois le quatrième rayon d'un faisceau d'inversion, et trois fois si l'on veut une vérification.

§ IV. — *Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe ou inverse.*

La définition du pôle d'une droite relativement à un triangle peut se déduire de la théorie générale des polaires. (*Voyez* l'article déjà cité des *Nouvelles Annales de Mathématiques*).

Il me suffira du reste de dire que le *pôle trilinéaire* d'une droite peut être considéré comme le point d'intersection des quatrièmes rayons des faisceaux harmoniques respectivement déterminés aux trois sommets du triangle par les côtés de l'angle, pris pour rayons conjugués, et par la droite qui joint le sommet de cet angle au point d'intersection du côté opposé avec la droite donnée.

Cette loi de conjugaison entre un point et une droite se traduit en une construction géométrique facile de l'un des éléments quand l'autre est donné. Elle n'exige même que l'emploi de la règle.

Si l'on nomme *pôle inverse* d'une droite l'inverse du pôle de cette droite, un second mode de conjugaison d'un point et d'une droite peut être considéré. Nous avons ainsi les deux modes de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe ou inverse.

Soit la droite

$$t\alpha + u\beta + v\gamma = 0.$$

Le pôle (t', u', v') de cette droite est le point d'intersection des trois droites

$$t\alpha - v\gamma = 0, \quad u\beta - v\gamma = 0, \quad t\alpha - u\beta = 0.$$

L'équation de la droite peut alors recevoir la forme

$$\frac{t}{t'} + \frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} = 0,$$

ou, en fonction des coordonnées de l'inverse de son pôle,

$$tt'' + uu'' + vv'' = 0.$$

Ce sera de la polarité trilinéaire qu'il sera toujours question dans cette Étude. Je préviens donc, une fois pour toutes, que lorsque je parlerai, sans autre explication, de pôles et de polaires, il faudra toujours sous-entendre : relativement au triangle de référence.

§ V. — *Mode de conjugaison de deux droites par inversion trilinéaire des pôles.*

Lorsque trois droites, issues de trois sommets d'un triangle, coupent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite, il en est de même des trois droites inverses.

Les deux droites ainsi conjuguées ont les pôles inverses. Je nommerai ces droites *droites de pôles inverses.*

Soit l'équation d'une droite, en fonction des coordonnées de son pôle

$$\frac{t}{t'} + \frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} = 0.$$

Les droites qui joignent les sommets du triangle aux points d'intersection de cette droite avec les côtés opposés sont

$$tv' + vt' = 0, \quad uv' + vu' = 0, \quad tu' + ut' = 0.$$

Les inverses de ces droites, qui sont

$$tt' + vv' = 0, \quad uu' + vv' = 0, \quad tt' + uu' = 0,$$

coupent les côtés du triangle sur la droite

$$tt' + uu' + vv' = 0,$$

qui est la droite de pôles inverses de

$$\frac{t}{t'} + \frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} = 0.$$

Le mode de conjugaison de deux droites, par inversion trilinéaire des pôles, se traduit encore en une construction facile de l'une des droites quand l'autre est donnée. La droite cherchée peut s'obtenir, soit directement par deux faisceaux d'inversion, ou trois si l'on veut une vérification; soit en inversant le pôle de la droite donnée et cherchant la polaire de ce point.

§ VI. — *Remarques sur les modes de conjugaison précédents.*

Je crois bon de présenter le résumé des relations analytiques qui définissent les quatre modes de conjugaison précédemment examinés. Je donne ces relations : 1° dans le cas où l'on se sert de coordonnées trilinéaires; 2° dans celui où, se servant du système ordinaire de coordonnées, on prend pour axes deux côtés CA, CB du triangle de référence.

1° Soient : $(t'\,u'\,v')$, $(t''\,u''\,v'')$ deux points inverses; $t\alpha' + u\beta' + v\gamma' = 0$, $t\alpha'' + u\beta'' + v\gamma'' = 0$, les polaires de ces points, qui seront deux droites de pôles inverses; on aura :

Mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire :

$$t't'' - v'v'' = 0,$$
$$u'u'' - v'v'' = 0;$$

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe :

$$t'\alpha' - v'\gamma' = 0,$$
$$u'\beta' - v'\gamma' = 0;$$

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire inverse :

$$t''\gamma' - v''\alpha' = 0,$$
$$u''\gamma' - v''\beta' = 0;$$

Mode de conjugaison de deux droites par inversion trilinéaire des pôles :

$$\alpha'\alpha'' - \gamma'\gamma'' = 0,$$
$$\beta'\beta'' - \gamma'\gamma'' = 0.$$

2° Soient : $(x'y')$, $(x''y'')$ deux points inverses; $p'y + q'x - p'q' = 0$, $p''y + q''x - p''q'' = 0$, les polaires de ces points, qui seront deux droites de pôles inverses; on aura :

Mode de conjugaison de deux points par inversion trilinéaire :

$$x'' = \frac{y'(ay' + bx' - ab)}{y'^2 + x'^2 + 2x'y'\cos\theta - ax' - by'},$$
$$y'' = \frac{x'(ay' + bx' - ab)}{y'^2 + x'^2 + 2x'y'\cos\theta - ax' - by'}$$

(équations douées de réciprocité en x', y');

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire directe :

$$p'(ay' + 2bx' - ab) - abx' = 0,$$
$$q'(2ay' + bx' - ab) - aby' = 0;$$

Mode de conjugaison d'un point et d'une droite par polarité trilinéaire inverse :

$$p'[x''(b^2 + c^2) + y''ab - ab^2] - ab(ay'' + bx'' - ab) = 0,$$
$$q'[y''(a^2 + c^2) + x''ab - a^2b] - ab(ay'' + bx'' - ab) = 0;$$

Mode de conjugaison de deux droites par inversion

trilinéaire des pôles :

$$p'p''(c^2 - b^2) + (p' + p'')\,ab^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$q'q''(c^2 - a^2) + (q' + q'')\,a^2b - a^2b^2 = 0.$$

Il faut maintenant faire plusieurs observations qui ont leur utilité et dont on trouvera sans peine les démonstrations.

Un point d'un côté du triangle de référence a pour inverse le sommet opposé; et réciproquement un sommet a pour inverse un point indéterminé du côté opposé.

Un point de la circonférence circonscrite a son inverse situé à l'infini; et réciproquement trois droites parallèles, issues des trois sommets du triangle, ont pour inverses trois droites qui se coupent sur la circonférence.

Comme positions relatives, deux points inverses sont toujours : ou 1° *tous deux dans l'intérieur du triangle;* ou 2° *l'un dans l'angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle et l'autre dans le segment du cercle circonscrit qui a pour corde le côté opposé;* ou 3° *tous deux extérieurs au cercle circonscrit et situés dans le même angle du triangle.*

Le centre du cercle circonscrit et le point de concours des trois hauteurs sont deux points inverses.

Le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle est son propre inverse.

Le centre de gravité a pour inverse le point de concours des droites qui joignent un sommet au point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit menées par les deux autres sommets.

Un point d'un côté du triangle a pour polaire ce côté lui-même; et réciproquement un côté a pour pôle un point indéterminé de ce côté.

Une droite passant par un sommet a pour pôle ce

sommet; et réciproquement un sommet a pour polaire une droite indéterminée passant par ce sommet.

Le centre de gravité du triangle a sa polaire située à l'infini; et réciproquement, quand une droite s'éloigne à l'infini, son pôle vient au centre de gravité du triangle.

Lorsqu'un point s'éloigne à l'infini, sa polaire devient tangente à l'ellipse inscrite au triangle par les points milieux des côtés; réciproquement une droite tangente à l'ellipse ainsi déterminée a son pôle situé à l'infini.

L'inverse du centre de gravité a pour polaire la droite qui passe par les points d'intersection de chaque côté avec la tangente au cercle circonscrit menée par le sommet opposé.

Une droite passant par un sommet a pour droite de pôles inverses le côté opposé; et réciproquement un côté a pour droite de pôles inverses une droite indéterminée passant par le sommet opposé.

La polaire de l'inverse du centre de gravité, qui est la droite indiquée plus haut, a sa droite de pôles inverses située à l'infini.

§ VII. — *Méthodes de Géométrie comparée déduites des modes de conjugaison précédents.*

Les modes de conjugaison précédents conduisent tout naturellement à étudier dans leurs propriétés corrélatives, ou à comparer : 1° deux *lignes inverses*, c'est-à-dire conjuguées par la condition que les points de l'une soient les inverses des points de l'autre, ce qui entraîne réciprocité; 2° deux lignes conjuguées par la condition que l'une serve de directrice au pôle de la tangente de l'autre, ce qui, la figure de référence étant un triangle, n'entraîne nullement réciprocité comme cela a lieu quand la figure de référence est une conique; 3° deux lignes

conjuguées par la condition que l'une serve de directrice au pôle inverse de la tangente de l'autre, ce qui entraîne réciprocité, on le verra dans la seconde Partie de cette Étude; 4° deux lignes conjuguées par la condition que les tangentes de l'une soient les droites de pôles inverses des tangentes de l'autre, ce qui entraîne réciprocité.

Mon intention n'est pas de pousser bien loin dans ce Mémoire l'examen des propriétés générales des lignes conjuguées suivant l'un ou l'autre des modes précédents. En effet, toutes particulières et restreintes que puissent paraître, dans le domaine illimité que j'ai assigné à la Géométrie comparée, les méthodes que je mets en jeu, elles ouvriraient encore un champ indéfini aux recherches; et je n'ai guère en vue, pour le moment, que leur application aux sections coniques.

Dans tous les cas, le choix du triangle de référence, qui est resté jusqu'ici tout à fait arbitraire, a une influence radicale sur la nature de la conjuguée d'une ligne donnée. Quelques principes généraux montreront clairement cette influence et permettront de prévoir d'importants théorèmes dans les applications aux sections coniques, théorèmes qui seront alors démontrés directement et développés avec l'intérêt qu'ils me paraissent mériter.

Quant aux considérations sur lesquelles reposent les principes que je vais poser, elles se déduisent de données contenues dans le paragraphe précédent; mais je les supprime pour ne pas allonger davantage cette première Partie de mon travail.

Soient s et σ deux lignes inverses de degrés m et μ. Soient A_s, B_s, C_s et A_σ, B_σ, C_σ les nombres qui indiquent l'ordre de multiplicité de chaque sommet du triangle de référence, considéré comme un point multiple de chaque ligne; l'ordre de multiplicité étant o lorsque la ligne ne passe pas par le sommet.

Soient t et τ les enveloppes des polaires des points des deux lignes inverses précédentes, et supposons que p et π représentent les nombres de tangentes qu'on peut généralement mener aux deux lignes t et τ par un point extérieur. Soient a_t, b_t, c_t et a_τ, b_τ, c_τ les nombres indiquant l'ordre de multiplicité de chaque côté du triangle de référence, considéré comme tangente multiple à chaque ligne; l'ordre de multiplicité étant o lorsque la ligne n'a aucun point de contact sur le côté.

On aura les relations suivantes, selon les modes de conjugaison.

1er Mode. — *s et σ lignes conjuguées par inversion des pôles.*

$$m + \mu = A_s + B_s + C_s + A_\sigma + B_\sigma + C_\sigma,$$
$$m - A_s = \mu - A_\sigma,$$
$$m - B_s = \mu - B_\sigma,$$
$$m - C_s = \mu - C_\sigma.$$

2e Mode. — *s et t lignes conjuguées par polarité directe.*

$$m + p = A_s + B_s + C_s + a_t + b_t + c_t,$$
$$m - A_s = p - a_t,$$
$$m - B_s = p - b_t,$$
$$m - C_s = p - c_t.$$

3e Mode. — *s et τ conjuguées par polarité inverse.*

$$m = \pi,$$
$$m - A_s = \pi - a_\tau,$$
$$m - B_s = \pi - b_\tau,$$
$$m - C_s = \pi - c_\tau.$$

4e Mode. — *σ et τ lignes conjuguées par inversion des pôles de leurs tangentes.*

$$p + \pi = a_t + b_t + c_t + a_\tau + b_\tau + c_\tau,$$
$$p - a_t = \pi - a_\tau,$$
$$p - b_t = \pi - b_\tau,$$
$$p - c_t = \pi - c_\tau.$$

Je donnerai quelques exemples.

En faisant dans ces formules $m = 2$, $A_s = 1$, $B_s = 1$, $C_s = 1$, on trouve ces théorèmes :

L'inverse d'une conique circonscrite est une ligne droite; les polaires des points de la conique passent par un point fixe; les droites de pôles inverses de ces polaires ont pour enveloppe une conique inscrite.

Pour $p = 2$, $a_t = 1$, $b_t = 1$, $c_t = 1$, on trouve ces théorèmes :

Les pôles des tangentes d'une conique inscrite sont sur une ligne droite; les inverses de ces pôles sont sur une conique circonscrite; les droites de pôles inverses des tangentes de la conique inscrite passent par un point fixe.

On trouverait : qu'une conique qui ne passe par aucun sommet a pour inverse une ligne du quatrième degré ayant un point double en chaque sommet; qu'une ligne du troisième degré simplement circonscrite a pour inverse une ligne du troisième degré simplement circonscrite; qu'une ligne du troisième degré circonscrite et ayant un point double en un sommet a pour inverse une conique passant par ce sommet, etc., etc.

La ligne du troisième degré qui est le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites, ligne dont l'équation pourrait s'écrire immédiatement, au moyen des formules du § VI, jouit de cette propriété d'être sa propre inverse relativement à l'un quelconque des quatre triangles déterminés par les quatre droites. On pourrait déduire de cette propriété plusieurs conséquences auxquelles je ne m'arrêterai pas.

(*La suite prochainement.*)

RÈGLES

pour reconnaître l'espèce d'une surface du second ordre à centre unique, non situé sur la surface, en n'employant que les sections par les plans coordonnés, et dans certains cas le diamètre conjugué à l'une d'elles ou le signe du déterminant du centre;

PAR M. DIEU,
Professeur à la Faculté de Lyon.

I. Les sections elliptiques par des plans passant par le centre sont *réelles* pour l'ellipsoïde réel et pour l'hyperboloïde à une nappe, *imaginaires* pour l'hyperboloïde à deux nappes et pour l'ellipsoïde imaginaire.

Les sections paraboliques des hyperboloïdes par des plans contenant le centre se réduisent toujours à deux droites parallèles, et ces droites sont *réelles* ou *imaginaires* selon que l'hyperboloïde est à une nappe ou à deux nappes.

La première de ces deux remarques est évidente d'elle-même, la seconde se démontre comme il suit.

Les deux hyperboloïdes sont compris dans l'équation

$$x^2 + Py^2 - P'z^2 = G,$$

P', G étant des quantités positives et P une quantité positive ou négative selon que l'hyperboloïde est à une nappe ou à deux nappes. — Un plan $y = mz$ donne

$$x^2 + (Pm^2 - P')z^2 = G \tag{1}$$

qui représente deux droites réelles pour $m = \pm\sqrt{\frac{P'}{P}}$ quand l'hyperboloïde est à une nappe, mais qui ne peut

représenter qu'une hyperbole dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes. — Un plan $x = \alpha y + \beta z$ donne

$$(2) \qquad (\alpha^2 + P)y^2 + 2\alpha\beta yz + (\beta^2 - P')z^2 = G,$$

et la section sera parabolique si l'on a

$$P'\alpha^2 - P\beta^2 + PP' = 0;$$

mais on tire de là

$$\alpha^2 + P = \frac{P\beta^2}{P'}, \quad \beta^2 - P' = \frac{P'\alpha^2}{P},$$

en sorte que l'équation précédente se ramène à

$$\left(\beta y + \frac{P'\alpha}{P} z\right)^2 = \frac{P'G}{P};$$

la section se compose donc de deux droites qui sont réelles ou imaginaires selon que P est positif ou négatif.

On voit qu'une section hyperbolique ne peut se réduire à deux droites concourantes, car une équation telle que (1) ou (2) ne peut présenter ce cas particulier à moins d'avoir son second membre nul.

II. Quand une surface du second ordre est à centre unique, qu'on l'a rapportée à trois axes passant par ce point et qu'il n'est pas sur la surface, l'examen des sections par les plans coordonnés fait immédiatement reconnaître la nature de la surface dans deux cas :

1° *Une parabole :* la surface est un hyperboloïde à une nappe si la parabole est réelle ; la surface est un hyperboloïde à deux nappes si la parabole est imaginaire.

2° *Une ellipse et une hyperbole* : la surface est un hyperboloïde à une nappe si l'ellipse est réelle ; la surface est une hyperboloïde à deux nappes si l'ellipse est imaginaire.

Remarque. — Le lieu d'une équation du second degré de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = G,$$

pour laquelle on a

$$B^2 - 4AC \leqq 0,$$

est réel ou imaginaire selon que A et G sont de même signe ou de signes contraires.

D'après une seule des sections par les plans coordonnés, en laissant le cas de la parabole qui fixe la nature de la surface, on a les alternatives suivantes :

1° *Une ellipse réelle :* la surface est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe;

2° *Une ellipse imaginaire :* la surface est un hyperboloïde à deux nappes ou un ellipsoïde imaginaire;

3° *Une hyperbole :* la surface est un des deux hyperboloïdes.

On voit que l'ambiguïté subsiste même après examen des trois sections, si elles sont trois ellipses ou trois hyperboles.

III. Une section elliptique ou hyperbolique par un des plans coordonnés (*) et l'espèce du diamètre conjugué à ce plan (*réel ou imaginaire*) font toujours connaître d'une manière précise la nature d'une surface du second ordre :

1° *Une ellipse réelle avec le diamètre conjugué réel :* ellipsoïde réel;

2° *Une ellipse réelle avec le diamètre conjugué imaginaire*; *une hyperbole avec le diamètre conjugué réel:* hyperboloïde à une nappe;

3° *Une ellipse imaginaire avec le diamètre conjugué*

(*) Si l'on obtient une parabole, il n'y a pas de doute (II).

réel; *une hyperbole avec le diamètre conjugué imaginaire :* hyperboloïde à deux nappes;

4° *Une ellipse imaginaire avec le diamètre conjugué imaginaire :* ellipsoïde imaginaire.

On sait en effet, dans chaque cas, combien la surface a de diamètres réels ou imaginaires sur trois diamètres conjugués.

Détermination de l'espèce du diamètre conjugué à un des plans coordonnés. — Soient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2By z + 2B'zx + 2B''xy = G$$

l'équation de la surface, et

$$x = mz, \quad y = nz$$

celles d'un diamètre; l'équation du plan conjugué est

$$(Am + B''n + B')x + (B''m + A'n + B)y$$
$$+ (B'm + Bn + A'')z = 0.$$

Pour que ce plan soit, par exemple, celui des xy, il faut déterminer m, n par les équations

$$(1) \qquad Am + B''n + B' = 0, \quad B''m + A'n + B = 0.$$

Les z des points réels ou imaginaires communs à la surface et à la droite $x = mz$, $y = nz$ sont donnés en général par l'équation

$$(2)\,(Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn)\,z^2 = G;$$

mais m, n étant déterminés par les équations (1) d'où l'on tire

$$Am^2 + A'n^2 + 2B''mn = -Bn - B'm,$$

l'équation (2) se réduit à

$$(3) \qquad (B'm + Bn + A'')\,z^2 = G.$$

Donc, *selon que* $B'm + Bn + A''$ *prend une valeur de*

même signe que G *ou de signe contraire, pour les valeurs de* m, n *déduites des équations* (1), *le diamètre conjugué au plan des* xy *est réel ou imaginaire.*

Remarque I. — On ne pourrait faire ce calcul si l'on avait $B''^2 - AA' = 0$; mais il serait inutile dans ce cas.

Remarque II. $B'm + Bn + A''$ ne peut pas être nul pour les valeurs de m, n tirées des équations (1), puisque le déterminant des équations du centre est différent de zéro par hypothèse. Ce déterminant étant désigné par D, l'équation (3) donne en effet la formule

$$(4) \qquad Dz^2 = G(B''^2 - AA').$$

IV. Il suffit de changer z en y ou x, et $B''^2 - AA'$ en $B'^2 - AA''$ ou $B^2 - A'A''$ dans la formule (4), pour avoir celles qui se rapportent aux plans des zx et des yz. — Donc :

Le diamètre conjugué à l'un des plans coordonnés est réel ou imaginaire selon que le produit DG *est de même signe que le binôme correspondant à ce plan ou de signe contraire.*

RÉSUMÉ.

1° Un binôme négatif; G de même signe que les coefficients A,..., de ce binôme; $DG < 0$:

Ellipsoïde réel.

2° Un binôme négatif; G de même signe que les coefficients A...; $DG > 0$;

Un binôme positif; $DG > 0$;

Un binôme nul, G de même signe que les coefficients A... :

Hyperboloïde à une nappe.

3° Un binôme négatif; G de signe contraire aux coefficients A...; $DG < 0$;

Un binôme positif; DG $<$ o;

Un binôme nul; G de signe contraire aux coefficients A :

Hyperboloïde à deux nappes.

4° Un binôme négatif; G de signe contraire aux coefficients A...; DG $>$ o :

Ellipsoïde imaginaire.

THÉORIE DES SURFACES POLAIRES D'UN PLAN

(voir p. 337);

PAR M. L. PAINVIN.

---

9. *Étant donnée l'*ÉQUATION PONCTUELLE *d'une surface, trouver son* ÉQUATION TANGENTIELLE.

Soit l'équation d'un plan,

$$Xx + Yy + Zz + Tt = 0,$$

X, Y, Z, T étant les paramètres de ce plan; cherchons les conditions pour qu'il soit tangent à la surface. Si x_0, y_0, z_0, t_0 sont les coordonnées du point de contact, on devra avoir, en identifiant avec l'équation du plan tangent,

$$(1^\circ) \qquad U(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0,$$

$$(2^\circ) \qquad \frac{\left(\frac{dU}{dx}\right)_0}{X} = \frac{\left(\frac{dU}{dy}\right)_0}{Y} = \frac{\left(\frac{dU}{dz}\right)_0}{Z} = \frac{\left(\frac{dU}{dt}\right)_0}{T};$$

en éliminant x_0, y_0, z_0, t_0 entre les quatre équations homogènes (1°) et (2°), on arrivera à une relation de la forme

$$(3^\circ) \qquad F(X, Y, Z, T) = 0;$$

c'est la condition pour que le plan soit tangent. Or, nous pouvons (9) regarder X, Y, Z, T comme les coordonnées de ce plan; l'équation (3°) est donc l'équation tangentielle de la surface.

Les équations (1°) et (2°) entraînent comme conséquence la relation

$$Xx_0 + Yy_0 + Zz_0 + Tt_0 = 0;$$

on peut, par conséquent, substituer au système des équations (1°) et (2°) le système suivant :

$$\text{(I)} \qquad -\frac{T}{X} = \frac{x_0}{t_0} + \frac{Y}{X}\frac{y_0}{t_0} + \frac{Z}{X}\frac{z_0}{t_0};$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{Y}{Z}\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 - \left(\frac{dU}{dy}\right)_0 = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{Z}{X}\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 - \left(\frac{dU}{dz}\right)_0 = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad U(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0.$$

Supposons qu'on se donne les rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, et que m soit le degré de l'équation de la surface; les équations (II), (III), (IV) ont $m(m-1)^2$ solutions communes $\left(\frac{x_0}{t_0}, \frac{y_0}{t_0}, \frac{z_0}{t_0}\right)$, et l'équation (I) donne $m(m-1)^2$ valeurs correspondantes pour $\frac{T}{X}$. Or, l'équation (3°) est une conséquence de ces quatre équations; donc, à un même système de valeurs données pour $\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)$, correspondent, dans cette équation, $m(m-1)^2$ valeurs pour $\frac{T}{X}$; *l'équation tangentielle* (3°) *est donc, en général, du degré* $m(m-1)^2$.

10. ***Étant donnée l'*ÉQUATION TANGENTIELLE *d'une surface, trouver son* ÉQUATION PONCTUELLE.**

Soit l'équation d'un point

$$xX + yY + zZ + tT = 0,$$

x, y, z, t étant les paramètres de ce point; cherchons les conditions pour qu'il soit sur la surface. Si X_0, Y_0, Z_0, T_0 sont les coordonnées d'un plan tangent, on devra avoir, en identifiant avec l'équation du point de contact,

$$(1^\circ) \qquad U(X_0, Y_0, Z_0, T_0) = 0;$$

$$(2^\circ) \qquad \frac{\left(\frac{dU}{dX}\right)_0}{x} = \frac{\left(\frac{dU}{dY}\right)_0}{y} = \frac{\left(\frac{dU}{dZ}\right)_0}{z} = \frac{\left(\frac{dU}{dT}\right)_0}{t}.$$

En éliminant X_0, Y_0, Z_0, T_0 entre les équations (1°) et (2°), on arrivera à une relation de la forme

$$(3^\circ) \qquad F(x, y, z, t) = 0;$$

c'est la condition pour que le point soit sur la surface. Mais on peut (**14**) regarder x, y, z, t comme les coordonnées du point; l'équation (3°) sera donc l'équation ponctuelle de la surface.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on verra que *si n est le degré de l'équation tangentielle, $n(n-1)^2$ sera, en général, le degré de l'équation ponctuelle.*

11. *Surfaces développables.* — Une surface développable est représentée par deux équations tangentielles telles que

$$(1^\circ) \qquad U = 0, \quad V = 0,$$

et cette surface est circonscrite aux deux surfaces U et V. Ainsi, dans le système des équations tangentielles, les

surfaces développables sont corrélatives des courbes de l'espace dans le système des équations ponctuelles.

Les coordonnées d'un plan P, passant par l'intersection D des deux plans fixes P_0 et P_1, sont

$$X = \frac{\lambda X_1 + \mu X_0}{\rho}, \quad Y = \frac{\lambda Y_1 + \mu Y_0}{\rho},$$

$$Z = \frac{\lambda Z_1 + \mu Z_0}{\rho}, \quad T = \frac{\lambda T_1 + \mu T_0}{\rho};$$

pour que ce plan P soit tangent à la surface développable, il faut qu'il soit tangent à la fois aux surfaces U et V. Or, si l'on substitue les valeurs précédentes de X, Y, Z, T dans les équations (1°), on aura deux équations homogènes en $\frac{\lambda}{\mu}$, lesquelles n'auront pas, en général, de solution commune. Donc, par une droite arbitraire, on ne peut pas mener de plan tangent à une surface développable.

Donnons-nous un point fixe

$$(2^\circ) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0;$$

les solutions communes aux équations (1°) et (2°) donneront des plans tangents à la surface développable et passant par le point fixe. Or, si n et n_1 sont les classes respectives des surfaces U et V, le nombre des solutions communes sera $1 . n . n_1$.

Nous appellerons *classe d'une surface développable le nombre des plans tangents qu'on peut mener à cette surface par un point quelconque. Nous voyons, en outre, que si n et n_1 sont les classes des surfaces qui déterminent la surface développable, la classe de cette dernière sera égale à nn_1.*

Cette proposition complète l'idée de la corrélation des surfaces développables et des courbes gauches.

12. *Signification de l'équation homogène*

$$\varphi(X, Y, Z) = 0.$$

Soit X_0, Y_0, Z_0 une solution, différente de zéro, de l'équation

$$(1^\circ) \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0;$$

l'équation (1°), ne renfermant pas T, sera vérifiée, quels que soient λ et μ, par

$$(2^\circ) \quad X = \frac{\lambda X_0}{\rho}, \quad Y = \frac{\lambda Y_0}{\rho}, \quad Z = \frac{\lambda Z_0}{\rho}, \quad T = \frac{\lambda T_0 + \mu T_1}{\rho};$$

T_0 et T_1 étant les valeurs de T fournies par la relation (10), lorsqu'on y remplace successivement (X, Y, Z) par (X_0, Y_0, Z_0) et (0, 0, 0); les valeurs (2°) déterminent donc un plan tangent à la surface (1°). Mais ce plan passe (11) par l'intersection L des deux plans (X_0, Y_0, Z_0, T_0) et (0, 0, 0, T_1) ou ABC; et, puisque λ et μ sont quelconques, il y a, par suite, une infinité de plans tangents passant par la droite L; de plus le point de contact est fixe. Or, comme les droites L sont dans le plan fixe ABC, la surface se réduit donc à une courbe plane située dans le plan ABC. Ainsi, l'équation

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

représente une courbe plane située dans le plan ABC; X, Y, Z peuvent être regardées comme les coordonnées d'une tangente quelconque à cette courbe.

13. Il n'est pas inutile d'indiquer la corrélation des figures représentées par une équation, suivant que cette dernière est interprétée dans le système ponctuel ou dans le système tangentiel.

Une *équation ponctuelle* représentant :

1° Une surface réglée gauche,
2° Une surface développable,

3° Un cône,
4° Une courbe gauche, } deux équations;
5° Une courbe plane, }

donne, si on la considère *comme équation tangentielle:*

Une surface réglée gauche,
Une courbe gauche,
Une courbe plane,
Une surface développable, } deux équations.
Un cône, }

Il est facile de se rendre compte de cette corrélation. Car exprimer, dans le système des équations ponctuelles, qu'il y a une infinité de points situés sur la surface et sur une même ligne droite, revient à exprimer, dans le système des équations tangentielles, qu'il y a une infinité de plans tangents passant par une même droite; cette droite est donc tout entière sur la surface. Or, dans le système ponctuel, il pourra arriver que le *plan tangent* aux divers points d'une même génératrice varie avec la position du point, si la surface est gauche; ou qu'il soit invariable, si la surface est développable. Alors (dans le système tangentiel), il arrivera, pour le premier cas, que le *point de contact* du plan tangent passant par la même génératrice varie avec la position du plan : la surface est alors gauche; pour le second cas, que le point de contact est invariable : la surface se réduit alors à une courbe gauche. Lorsque la surface est un cône (dans le système ponctuel), le *plan tangent* passe par un point fixe; dans le système tangentiel, le *point de contact* décrira un plan fixe, la surface se réduira donc alors à une courbe plane.

14. En terminant cette première Partie, je rappellerai la définition du centre harmonique d'un système de points; cette notion nous sera utile dans la seconde Partie.

I° « Soient n points M_i situés sur une même droite : on
» appelle *centre harmonique* du système par rapport à
» un point O pris sur cette même droite, un point M tel
» que

$$\frac{n}{OM} = \frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2} + \ldots + \frac{1}{OM_n}. \text{ »}$$

II° « Soient un système de n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$
» situés dans un plan et une droite fixe L située dans le
» même plan. Joignons un point quelconque O de la
» droite L aux n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$; puis, coupons
» le faisceau $(OL; OM_1, OM_2, \ldots, OM_n)$ par une
» transversale quelconque, et soient $(l; m_1, m_2, \ldots, m_n)$
» les points d'intersection. Prenons le centre harmo-
» nique m, par rapport au point l, des points $m_1, m_2, \ldots,$
» m_n, et joignons-le au point O ; la droite Om passera
» toujours par un certain point fixe M, quelle que soit
» la transversale considérée, et quel que soit le point O
» pris sur la droite L. Nous donnerons, d'après M. Pon-
» celet, à ce point fixe M le nom de *centre harmonique*
» *du système plan* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *par rapport à la*
» *droite* L. »

III° La notion du centre harmonique peut encore se
généraliser comme il suit :

« Soient n points M_i (x_i, y_i, z_i, t_i) disposés d'une ma-
» nière quelconque dans l'espace, et un plan fixe P.
» Joignons un point quelconque O du plan P aux n
» points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, et coupons le faisceau
» $(OM_1, OM_2, \ldots, OM_n)$ par un plan transversal quel-
» conque ; soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les intersections du
» faisceau, et L l'intersection du plan fixe P par le plan
» transversal. Concevons le centre harmonique m du
» système plan $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ par rapport à la droite L,
» et joignons Om ; la droite Om passera toujours par un

» certain point fixe M, quel que soit le plan transversal
» considéré et quel que soit le point O pris sur le plan P.
» J'appellerai ce point fixe M le *centre harmonique du*
» *système* M_1, M_2, ..., M_n *par rapport au plan* P. »

Si l'équation du plan fixe P est

(16) $$Ax + By + Cz + Dt = 0,$$

on constatera, par un calcul qui n'offre pas de grandes difficultés, la propriété énoncée du centre harmonique, et on verra, en outre, que ses coordonnées sont fournies par les formules

(17) $$x = \frac{\sum \frac{x_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}}, \quad y = \frac{\sum \frac{y_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}}, \quad z = \frac{\sum \frac{z_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}}, \quad t = \frac{\sum \frac{t_i}{\Delta_i}}{\sum \frac{1}{\Delta_i}},$$

formules dans lesquelles on a posé

(18) $$\Delta_i = Ax_i + By_i + Cz_i + Dt_i;$$

x_i, y_i, z_i, t_i sont les coordonnées du point M_i.

Les formules (17) nous montrent que le centre harmonique coïncide avec le centre de gravité du système, lorsqu'on attribue aux points M_1, M_2, ..., M_n les masses respectives $\frac{1}{\Delta_1}$, $\frac{1}{\Delta_2}$, ..., $\frac{1}{\Delta_n}$.

On voit aussi que, lorsque le plan P est le plan à l'infini, le centre harmonique coïncide avec le centre des moyennes distances.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

des formules de Trigonométrie sphérique qui donnent

$$\sin\frac{A}{2},\quad \cos\frac{A}{2},\quad \text{tang}\,\frac{A}{2};$$

Par M. E. BARBIER.

1. Prenons pour plan de la figure le plan du côté AB du triangle sphérique (*); par le sommet C opposé à ce côté menons deux plans, l'un perpendiculaire au rayon OA, l'autre perpendiculaire au rayon OB; ces plans ont pour traces DE et FG; ils se coupent suivant une droite CP perpendiculaire au plan de la figure.

2. Dans la section faite dans la sphère par le plan perpendiculaire à OA, l'arc CE est égal à l'angle A du triangle sphérique; par suite, dans le demi-cercle DCE, on a

$$\frac{CE}{DE} = \sin\frac{A}{2} \quad \text{et} \quad \frac{PE}{CE} = \sin\frac{A}{2}.$$

Multipliant membre à membre ces deux égalités et simplifiant, on en déduit

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{PE}{DE};$$

on obtiendrait de même

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{PD}{DE}$$

et aussi

$$\text{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{PE}{PD}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

3. On a :

$$FB = BG = a, \quad DA = AE = b, \quad AB = c;$$
$$\text{arc } DE = DA + AE = 2b,$$
$$\text{arc } FG = FB + BG = 2a,$$
$$\text{arc } DF = DA + AB - BF = b + c - a = 2(p - a),$$
$$\text{arc } FE = FB - BA + AE = a - c + b = 2(p - c),$$
$$\text{arc } EG = - EA + AB + BG = - b + c + a = 2(p - b),$$
$$\text{arc } DG = DA + AB + BC = b + c + a = 2p.$$

4. L'angle des diagonales DE et FG du quadrilatère inscrit DFEG est égal à l'angle des droites OA et OB qui leur sont respectivement perpendiculaires; or, cet angle est celui qu'on désigne par c.

5. On a :

$$\frac{\text{aire FPE}}{\text{PE}} = \frac{\text{aire FPD}}{\text{PD}} = \frac{\text{aire FDE}}{\text{DE}};$$

de même,

$$\frac{\text{aire GPE}}{\text{PE}} = \frac{\text{aire GPD}}{\text{PD}} = \frac{\text{aire GDE}}{\text{DE}}.$$

En ajoutant les rapports qui ont les mêmes dénominateurs, on obtient

$$\frac{\text{aire FEG}}{\text{PE}} = \frac{\text{aire FDG}}{\text{PD}} = \frac{\text{aire DFEG}}{\text{DE}}.$$

De là,

$$\frac{\text{PE}}{\text{DE}} \quad \text{ou} \quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{\text{aire FEG}}{\text{aire DFEG}},$$
$$\frac{\text{PD}}{\text{DE}} \quad \text{ou} \quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{\text{aire FDG}}{\text{aire DFEG}},$$
$$\frac{\text{PE}}{\text{PD}} \quad \text{ou} \quad \text{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{\text{aire FEG}}{\text{aire FDG}}.$$

6. L'aire d'un triangle est égale au produit de ses trois

côtés divisé par quatre fois le rayon du cercle circonscrit.

De ce théorème on déduit les égalités suivantes :

$$\text{aire FEG} = \frac{2\sin a . 2\sin(p-c) . 2\sin(p-b)}{4},$$

$$\text{aire FDG} = \frac{2\sin a . 2\sin(p-a) . 2\sin p}{4},$$

$$\text{aire DFEG} = \frac{2\sin a . 2\sin b . 2\sin c}{2}.$$

On obtient cette dernière égalité en exprimant que l'aire du quadrilatère DFEG est la moitié du résultat qu'on obtient en multipliant le produit de ses diagonales par le sinus de l'angle qu'elles forment.

On écrit facilement ces trois formules, si l'on se reporte aux égalités écrites dans le n° 3 et si l'on se rappelle la formule

$$\text{corde}\, 2x = 2\sin x.$$

7. Les valeurs des aires FEG, FDG, DFEG étant portées dans les formules qui donnent

$$\sin^2\frac{A}{2}, \quad \cos^2\frac{A}{2}, \quad \text{tang}^2\frac{A}{2},$$

on obtient en simplifiant

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\text{tang}^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}.$$

Ce sont les formules que je me proposais de démontrer d'une manière géométrique.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Session de juillet 1865.

1re *Question*. — On propose d'intégrer les équations simultanées

$$\frac{dy}{dx} + u'y - v'z = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} + v'y + u'z = 0,$$

u' et v' désignant les dérivées de deux fonctions données u et v de la variable x.

2e *Question*. — Un point matériel est repoussé par six masses égales placées aux six sommets d'un octaèdre régulier, la force répulsive étant supposée en raison inverse de la $n^{ième}$ puissance de la distance. — On demande si le centre est pour ce point matériel une position d'équilibre stable ou instable.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (1865).

Questions de Mathématiques.

1° On considère n variables $x, y, z, \ldots, u$: décomposer le polynôme

$$p = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + u^2 + (x + y + z + \ldots + u)^2,$$

composé de $n + 1$ carrés, en une somme de n carrés de fonctions homogènes et du premier degré.

2° Lieu des sommets des coniques passant par deux points, et dont les axes sont proportionnels et parallèles à ceux d'une conique donnée.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1865).

Composition de Mathématiques.

On donne dans un plan une parabole. On considère une circonférence passant par le foyer de cette parabole. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de la circonférence pour que cette courbe ait successivement avec la parabole : quatre points réels communs, quatre points imaginaires communs, deux points réels et deux points imaginaires communs. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième.

Composition de Géométrie descriptive.

On demande de représenter par ses contours apparents un solide terminé par un *hyperboloïde de révolution* et par deux *plans* : l'*hyperboloïde* a pour axe de révolution l'horizontale (AB, A'B') et pour génératrice la droite (CD, C'D') parallèle à la ligne de terre XY; les *plans* sont perpendiculaires à l'axe (AB, A'B') et également distants du centre de l'hyperboloïde. On supposera tracées sur ce solide douze génératrices d'un même système, la génératrice donnée (CD, C'D') est l'une de ces douze droites. Ces génératrices, également espacées, seront représentées en tenant compte des parties vues et des parties cachées.

Les arcs d'hyperbole qui appartiennent aux contours apparents du solide seront simplement tracés tangentiellement aux projections de ces génératrices.

On achèvera de déterminer le contour apparent du solide sur le plan vertical de projection en construisant quelques génératrices du système qui ne renferme pas la génératrice donnée; ces droites seront tracées comme lignes de construction.

A'B' et CD sont à 100 millimètres de la ligne de terre XY.

C'D' est à 25 millimètres de A'B'.

AB et CD comprennent un angle de 40 degrés.

Les plans qui terminent le solide sont l'un et l'autre à 70 millimètres du centre de l'hyperboloïde.

XY est parallèle aux petits côtés de la feuille de dessin et à égale distance de ces côtés.

Calcul trigonométrique.

Étant donnés, dans un triangle ABC, les côtés, savoir:

$$a = 12418^{m},58,$$
$$b = 28381^{m},14,$$
$$c = 34218^{m},76,$$

trouver les trois angles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (1865).

Tracé graphique.

On donne une pyramide triangulaire dont la base repose sur le plan horizontal et un plan placé d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection.

On fait tourner la pyramide autour de la trace horizontale du plan jusqu'à ce que le sommet de la pyramide soit venu se placer dans le plan. On demande les projections de la pyramide après son déplacement.

Calcul numérique de Trigonométrie rectiligne.

On donne dans un triangle deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 31949^{m},49,$$
$$b = 24434^{m},13,$$
$$C = 68^{o} - 43' - 28'',$$

et on demande les autres éléments A, B, *c* et S.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR (1865).

COMPOSITIONS EN MATHÉMATIQUES.

Calcul logarithmique.

Dans le triangle ABC l'angle $B = 51^{o}\,14'\,37'',8$; l'angle $C = 28^{o}\,55'\,35''$; le côté $BC = 4436^{m},857$: on demande de calculer le côté AB, et ensuite l'angle que fait ce côté avec la droite qui joint le sommet A au milieu du côté opposé BC.

On donnera un moyen de vérifier l'angle cherché, en se fondant sur ce qu'il ne dépend que des angles du triangle ABC, et nullement du côté BC.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Trouver les projections de l'intersection d'une pyramide régulière pentagonale, dont la base est sur le plan

horizontal, avec un plan perpendiculaire au plan vertical.

On prendra les données suivantes :

Pyramide.

Le côté du pentagone qui sert de base a $0^m,07$ de longueur ; l'un des côtés est situé sur une parallèle à la ligne de terre, menée à une distance de $0^m,03$.

Hauteur de la pyramide, $0^m,10$.

Plan.

Le plan sécant fait avec le plan horizontal un angle égal à 30 degrés, et il est à une distance de $0^m,05$ du sommet de la pyramide.

Après avoir déterminé les projections de l'intersection, on cherchera l'angle de deux faces latérales de la pyramide.

QUESTIONS.

---

737. On peut inscrire à un cercle donné une infinité de triangles dont les hauteurs se croisent en un point donné. Trouver, par la Géométrie, la commune enveloppe des côtés de ces triangles. (PAUL SERRET.)

738. Une ellipse et l'un de ses cercles directeurs étant tracés, il existe une infinité de triangles simultanément inscrits au cercle et circonscrits à l'ellipse ; le point de rencontre des hauteurs est le même pour tous ces triangles. (PAUL SERRET.)

739. Équation d'une surface du second degré passant par trois droites.

On peut mettre les équations des trois droites données sous la forme suivante :

$$\text{1}^{\text{re}}\text{ droite}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} A = 0; \\ B = 0; \end{array}\right.$$

$$\text{2}^{\text{e}}\text{ droite}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} C = 0; \\ D = 0; \end{array}\right.$$

$$\text{3}^{\text{e}}\text{ droite}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0; \\ A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta' = 0. \end{array}\right.$$

L'équation de la surface du second degré est

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'}.$$

A, B, C et D désignent des fonctions du premier degré en x, y et z; α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' sont des constantes.

(E. Barbier.)

740. Deux cercles étant donnés, on inscrit dans l'un d'eux un quadrilatère dont les côtés coupent la corde commune en quatre points; il est possible d'inscrire dans l'autre cercle une infinité de quadrilatères dont les côtés passent par les mêmes points de la corde commune.

(E. Barbier.)

741. Si l'on coupe un fuseau sphérique donné par une série de grands cercles tournant autour d'un diamètre quelconque, le lieu géométrique des milieux des arcs interceptés dans le fuseau sera un grand cercle qui aura le même diamètre que le fuseau. (Housel.)

742. Le lieu des foyers des paraboles conjugués à un triangle donné est la circonférence des neuf points de ce triangle. (J. Griffiths.)

743. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les points auxquels les côtés d'un triangle ABC sont touchés par le cercle inscrit; par chacun

des sommets A, B, C on mène une droite parallèle à l'axe d'homologie des triangles ABC, $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ et on désigne par x, y, z les points de leur intersection avec les côtés BC, CA, AB, et par p le pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle inscrit $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ sur l'axe d'homologie des triangles ABC, xyz : démontrer que la circonférence des neuf points du triangle ABC touche la circonférence inscrite $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ au point p.

(J. GRIFFITHS.)

744. On donne sur un plan une conique et un point fixe; on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle conjugué à la conique, et par les pieds de ces perpendiculaires on fait passer une circonférence. Pour chaque triangle conjugué à la conique, on décrit ainsi une circonférence : toutes ces circonférences ont le même centre radical. (MANNHEIM.)

745. D'un point pris dans le plan d'une courbe géométrique on mène toutes les tangentes à cette courbe, on divise le rayon de courbure relatif à chaque point de contact par le cube de la distance de ce point au point fixe d'où émanent les tangentes : la somme de tous les rapports ainsi obtenus est égale à zéro. (MANNHEIM.)

746. Démontrer la relation

$$m = \left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sin\frac{2\pi}{m}\cdot\sin\frac{3\pi}{m}\cdots\sin\frac{\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{3\pi}{2m}\cdot\sin\frac{5\pi}{2m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}} \right\}^2,$$

dans laquelle m est un nombre entier pair.

(E. CATALAN.)

747. Quelle est l'enveloppe du plan mené perpendi-

culairement à l'extrémité du diamètre d'un ellipsoïde, lorsque cette extrémité décrit une circonférence?

(E. CATALAN.)

748. Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation $x^3 - px + q = 0$, on aura en nombres entiers

$$9q^2 + Aa^2 = r'^2,$$
$$9q^2 + Bb^2 = r''^2,$$
$$9q^2 + Cc^2 = r'''^2,$$

$\frac{A}{4p}, \frac{B}{4p}, \frac{C}{4p}$ étant racines de l'équation

$$y^3 - 3p^2y + 2p^3 - 27q^2 = 0,$$

et r, r', r'' étant de même racines d'une équation du troisième degré, dont les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles des coefficients de la proposée.

Remarque. — Les trois relations ci-dessus étant divisibles respectivement par a^2, b^2, c^2, les carrés $\frac{r'^2}{a^2}, \frac{r''^2}{b^2}, \frac{r'''^2}{c^2}$ sont encore racines d'une équation cubique qu'on peut construire.

(S. REALIS.)

CORRESPONDANCE.

1. Un abonné nous communique la proposition suivante :

Par un point M, *donné dans un angle* XOY, *on mène arbitrairement une droite rencontrant en des points* A, B *les côtés* OX, OY; *puis, du point* A *on conduit une nouvelle droite* AC *faisant avec* AB *un angle donné* α, *et on prend* AC *troisième proportion-*

nelle à BM, MA : démontrer que *le lieu du point* C *est une parabole.*

Cette question a été résolue par de l'Hospital (*Traité analytique des Sections coniques*, p. 254, exemple IV), et la solution est suivie du renseignement que voici :

« Le comte Roger de Vintimille a proposé ce pro-
» blème avec quelques autres dans le *Journal de Parme*
» du mois d'avril de l'année 1693, ce qui a donné occa-
» sion au père Saquerius de faire imprimer un petit
» livre à Milan, dans lequel il avoue qu'il n'a pu ré-
» soudre celui-ci, quoiqu'il fasse assez paraître par la
» solution des autres qu'il est fort versé dans la Géomé-
» trie. »

2. Un Professeur nous adresse, de la Belgique, une solution très-complète et très-détaillée de la question qui a pour objet de *déterminer le lieu géométrique des foyers d'une conique tangente à quatre droites données.*

La même question a déjà été résolue par M. Salmon; l'ingénieuse solution qu'il en a donnée n'occupe que *cinq* lignes d'impression dans son *Traité des Sections coniques* (p. 261, exemple XV).

En désignant par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des quatre droites données, l'équation du lieu cherché est

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \frac{d}{\delta} = 0.$$

Les rapports des coefficients a, b, c, d s'obtiennent par un calcul très-simple, et de l'équation de la courbe on déduit facilement les propriétés énoncées dans les *Nouvelles Annales* (1re série, t. XX, p. 56). G.

ANALOGIES DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE

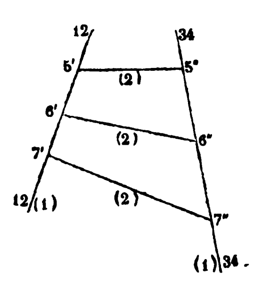
(voir p. 145 et 193);

PAR M. PAUL SERRET.

IV.

13. Le *plan des centres* de toutes les surfaces du second ordre tangentes à sept plans donnés est susceptible d'une seconde construction et qui rappelle, autant que le permet la diversité des choses, la construction de la *droite des centres* pour les coniques inscrites à un système de quatre droites.

Soient 1, 2,..., 7 les plans donnés; 12, 23,... les



droites de rencontre des plans 1 et 2, 2 et 3,.... Que l'on imagine un hyperboloïde à une nappe H, assujetti à passer par la droite 12, par la droite 34, et à être tangent, en outre, à chacun des plans non encore employés, 5, 6, 7. Assujetti de la sorte à neuf conditions, l'hyperboloïde H est déterminé, et il est aisé de voir que son centre

appartient au plan général des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes aux sept plans donnés. Car l'hyperboloïde H est d'abord explicitement assujetti à être tangent aux plans 5, 6, 7. Passant, en outre, par la droite 12, comme par la droite 34, il se trouve tangent à tous les plans menés par chacune de ces droites ; et, en particulier, aux plans 1, 2, 3 et 4 : il est donc tangent aux sept plans donnés. Son centre, d'ailleurs, peut être construit bien aisément. Regardant, en effet, les droites 12, 34 qui ne sont pas, en général, dans un même plan, comme formant deux génératrices du premier système de l'hyperboloïde H ; chacun des plans tangents 5, 6, 7 renferme une génératrice du second système, rencontrant les génératrices 12, 34 du premier en des points qui peuvent être construits : puisqu'ils ne sont autres que les traces des droites 12 et 34 sur chacun des plans 5, 6, 7. Ces traces donc étant déterminées, et réunies deux à deux par les droites $5'5''$, $6'6''$, $7'7''$; on a dans ces droites trois génératrices d'un même système de l'hyperboloïde H, dont le centre se trouve, dès lors, soit au centre du parallélipipède construit sur les trois génératrices ; soit, ce qui vaut mieux pour l'analogie, au point de concours des *médianes* de deux quelconques des trois quadrilatères gauches $5'5''6''6'$, $6'6''7''7'$, $5'5''7''7'$.

De là cette construction : *Former les trois quadrilatères gauches ayant deux de leurs côtés opposés dans les droites* 12, 34, *et leurs sommets aux traces de ces droites sur deux quelconques des plans* 5, 6, 7 ; *menant ensuite les médianes* (droites des points milieux des diagonales) *de deux de ces quadrilatères, le point de concours de ces médianes est un premier point du plan général des centres.* Le nombre des points que l'on peut obtenir de la sorte, en permutant entre eux les éléments de cette construction, est égal au triple du nombre des combinaisons

de sept lettres prises quatre à quatre, ou trois à trois :

$$3C_{\frac{3}{7}} = 3 \cdot \frac{7.6.5}{1.2.3} = 3.35 = 105.$$

Comment déduire de cette construction (*) l'équation

$$\sum_1^7 \lambda P^2 = 0$$

du plan général des centres?

V.

14. *Les côtés* 1, 2, 3, 4 *d'un quadrilatère plan donnant lieu à trois systèmes de sommets* opposés *et à trois diagonales réunissant les sommets de chaque système : toute conique qui divise harmoniquement deux des diagonales divise harmoniquement la troisième* (Hesse).

Soient, en effet,

$$0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4$$

les côtés du quadrilatère donné ; considérons la courbe

(1) $$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 = 0;$$

et la polaire, prise par rapport à cette courbe, d'un point quelconque (p_1, p_2, p_3, p_4)

(2) $$\lambda_1 p_1 . P_1 + \lambda_2 p_2 . P_2 + \lambda_3 p_3 . P_3 + \lambda_4 p_4 . P_4 = 0.$$

Si le point considéré coïncide avec l'un quelconque des sommets du quadrilatère, avec le sommet (1, 2) par exemple, on devra poser

$$0 = p_1 = p_2,$$

et l'équation (2) devenant, par cette substitution,

(2') $$\lambda_3 p_3 . P_3 + \lambda_4 p_4 . P_4 = 0,$$

(*) La définition de la sphère, lieu géométrique des centres des hyperboloïdes équilatères inscrits à un hexaèdre, peut s'obtenir géométriquement par des considérations semblables et sur lesquelles nous reviendrons.

on voit que la polaire, prise par rapport à la courbe (1), de chacun des sommets du quadrilatère, passe par le sommet opposé. Les trois diagonales du quadrilatère donné sont donc divisées harmoniquement par chacune des courbes (1). Et comme l'équation de ces courbes contient trois paramètres arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ permettant de faire passer l'une d'elles par trois points pris à volonté; on voit qu'une conique, assujettie à diviser harmoniquement chacune des trois diagonales d'un quadrilatère, ne se trouve réellement assujettie qu'à *deux* conditions : ou, en d'autres termes, que toute conique qui divise harmoniquement les deux premières diagonales divise de même la dernière. Le quadrilatère et la conique sont dits alors *conjugués*.

15. Si l'on dispose des rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ de manière que l'équation (1) soit satisfaite par les coordonnées de trois points situés sur une même droite $Q = o$; la fonction (1) sera décomposable en un produit de deux facteurs linéaires $Q.Q'$; et l'on aura identiquement

$$o = \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P \quad + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 \equiv Q.Q'.$$

De là ce théorème connu : *Si l'on prend les traces d'une même droite sur les trois diagonales d'un quadrilatère; les points conjugués harmoniques de chacune de ces traces, par rapport à la diagonale correspondante, sont trois points en ligne droite.*

Dans le cas particulier où la fonction Q se réduit à une constante, l'équation précédente s'abaisse au premier degré et représente la droite des milieux des diagonales du quadrilatère donné.

16. Le lieu des pôles d'une droite donnée $Q = o$ par rapport à toutes les coniques inscrites au quadrilatère

$o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ est la droite $Q' = o$ définie par l'identité suivante :

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 \equiv Q.Q'.$$

17. *Toute surface du second ordre qui divise harmoniquement* quatre *des dix diagonales d'un hexaèdre complet, divise harmoniquement toutes les autres.*

Soient, en effet,

$$o = P_1 = P_2 = \ldots = P_6$$

les plans des faces de l'hexaèdre donné; considérons la surface

$$(1) \qquad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \ldots + \lambda_6 P_6^2 = o,$$

et le plan polaire

$$(2) \qquad \lambda_1 p_1 P_1 + \lambda_2 p_2 P_2 + \ldots + \lambda_6 p_6 P_6 = o,$$

pris par rapport à cette surface, d'un point quelconque $(p_1, p_2, \ldots, p_6)$. Si ce point coïncide avec l'un des sommets de l'hexaèdre, par exemple avec le sommet (123), on devra poser

$$o = p_1 = p_2 = p_3 :$$

et l'équation (2) devenant, par cette substitution,

$$(2') \qquad \lambda_4 p_4 P_4 + \lambda_5 p_5 P_5 + \lambda_6 p_6 P_6 = o;$$

on voit que le plan polaire, pris par rapport à la surface (1), de chacun des sommets de l'hexaèdre, passe par le sommet opposé. Chacune des dix diagonales de l'hexaèdre est donc divisée harmoniquement par la surface. Et comme l'équation (1) de celle-ci renferme cinq rapports arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5 : \lambda_6$ permettant encore de faire passer la surface par cinq points pris à volonté dans l'espace; on voit qu'une surface du second ordre, assujettie

à diviser harmoniquement chacune des dix diagonales d'un hexaèdre, est seulement assujettie par là à quatre conditions : ou, en d'autres termes, que toute surface de cet ordre qui divise harmoniquement quatre des diagonales d'un hexaèdre divise de même les six autres. L'hexaèdre et la surface sont dits, dans ce cas, *conjugués*.

18. Si l'on dispose des coefficients λ de manière que la fonction (1) se décompose en un produit de deux facteurs linéaires, ou que l'on ait identiquement

$$(3) \qquad o = \sum_1^6 \lambda P^2 = Q.Q',$$

deux des cinq rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \ldots$ resteront arbitraires en permettant, non de prendre à volonté le plan Q, mais de le faire passer par une droite donnée. De là cette conclusion négative : les conjugués harmoniques, par rapport aux dix diagonales d'un hexaèdre, des traces d'un plan quelconque Q sur ces diagonales, ne sont pas, en général, dix points d'un même plan ; si ce n'est dans le cas où le plan Q est tangent à une certaine surface : la surface-enveloppe (ce me semble) du plan d'une conique tangente aux plans des six faces de l'hexaèdre.

19. Si le second facteur Q' de l'une des décompositions (3) se réduit à une constante, le plan représenté par l'équation

$$(3') \qquad o = \sum_1^6 \lambda P^2 \equiv Q$$

contenant les points milieux des dix diagonales, ces points milieux sont dans un même plan. C'est le cas où la *sphère* représentée par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = o$$

se réduit à un plan.

20. Les propositions des nos 14 et 17 ont leurs corrélatives que l'on énoncerait aisément : la première concernant un quadrangle plan et les coniques *conjuguées*; la seconde, un hexagone gauche et les ellipsoïdes *conjugués*.

VI.

21. Lemme. — *Six droites* $o = P_1 = P_2 = \ldots = P_6$, *situées dans le même plan, étant telles que la fonction* $\sum_1^6 \lambda P^2$ *puisse être rendue identiquement nulle, ou que l'on ait l'*identité

$$(1) \qquad \sum_1^6 \lambda P^2 \equiv o:$$

ces six droites sont tangentes à une même conique.

L'identité (1) imposant six conditions aux cinq rapports arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_6$, cette identité n'aura lieu qu'en vertu d'une convenable dépendance entre les six droites données. Pour trouver, d'ailleurs, la nature de cette dépendance, considérons la conique tangente aux cinq premières droites 1, 2, 3, 4, 5; et le faisceau des diamètres de cette courbe, représenté (*voir* le § I, n° 2) par l'équation

$$(2) \qquad \sum_1^5 \lambda P^2 = o$$

rendue linéaire à l'aide des coefficients. Entre l'*identité* (1) et l'équation (2) nous pouvons éliminer l'un des carrés, P_1^2 par exemple; et l'équation résultante

$$(2') \qquad \sum_2^6 \lambda' P^2 = o$$

ne cessera pas de représenter le faisceau des diamètres de la conique définie par les tangentes 1, 2,..., 5. D'ailleurs, comme l'équation équivalente (2), l'équation (2')

est du premier degré en x, y, et représente, dès lors, le faisceau des diamètres de la conique définie par les tangentes 2, 3, 4, 5, 6. Les deux coniques (1, 2, 3, 4, 5) et (2, 3, 4, 5, 6) ont donc les mêmes diamètres, le même centre, quatre tangentes communes. Elles coïncident; et les six droites 1, 2,..., 5, 6 sont tangentes à une même conique.

Nous reviendrons plus loin sur ce lemme et son corrélatif, susceptibles l'un et l'autre d'une grande extension.

22. *Les côtés de deux triangles isolément conjugués par rapport à une même conique sont six tangentes d'une seconde conique.* Réciproquement, etc.

La conique donnée étant conjuguée à chacun des triangles 123, 456, son équation peut s'écrire indifféremment

$$\sum_1^3 \lambda P^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_4^6 \lambda P^2 = 0,$$

et de ces équations équivalentes résulte l'*identité*

$$\sum_1^6 \lambda P^2 \equiv 0.$$

Donc, etc.

Par le théorème corrélatif, les six sommets des deux triangles appartiennent à une même conique.

23. Lemme. — *Huit plans* $0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_8$ *étant tels que la fonction* $\sum_1^8 \lambda P^2$ *soit identiquement nulle, ou que l'on ait l'*identité

$$\sum_1^8 \lambda P^2 \equiv 0: \tag{1}$$

toute surface du second ordre menée tangentiellement à sept de ces plans est d'elle-même tangente au huitième.

Considérons, en effet, l'équation

$$(2) \qquad \sum_{1}^{7} \lambda' P^2 = 0,$$

laquelle, rendue linéaire à l'aide des coefficients, représente (*voir* § II, n° 5) le plan général des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes aux sept premiers plans 1, 2,..., 7. Si nous éliminons l'un des carrés, P_1^2, par exemple, entre l'*identité* (1) et l'équation (2), l'équation résultante

$$(2') \qquad \sum_{2}^{8} \lambda'' P^2 = 0$$

représente toujours le lieu des centres des surfaces tangentes aux plans 1, 2,..., 7. Mais, de même que l'équation équivalente (2), l'équation (2') est du premier degré en x, y, z : elle représente donc aussi le lieu des centres des surfaces tangentes aux plans 2, 3,..., 7, 8. Les surfaces tangentes aux plans 1, 2,..., 7, et celles tangentes aux plans 2, 3,..., 8 ont donc leurs centres dans un même plan ; prises deux à deux, elles sont concentriques, et admettent six plans tangents communs : elles coïncident donc deux à deux ; et chacune d'elles est tangente aux huit plans 1, 2,..., 7, 8.

24. Corollaire I. — *Deux tétraèdres étant isolément conjugués à une même surface du second ordre, toute surface de cet ordre menée tangentiellement aux plans de sept des huit faces de ces tétraèdres, est d'elle-même tangente au plan de la huitième face.*

(Hesse.)

La surface donnée étant conjuguée à chacun des tétraèdres 1234, 5678, son équation peut s'écrire indiffé-

remment

$$\sum_1^4 \lambda P^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_5^8 \lambda P^2 = 0:$$

et, comme ces équations sont équivalentes, on a l'*identité*

$$\sum_1^8 \lambda P^2 \equiv 0.$$

Donc, etc.

Par la proposition corrélative, toute surface du second ordre menée par sept des sommets des deux tétraèdres passe d'elle-même par le huitième sommet.

25. Corollaire II. — *Toute surface du second ordre menée tangentiellement à sept plans donnés est d'elle-même tangente à un huitième plan déterminé* (Lamé) : *et ces huit plans sont ceux des faces de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une autre surface du même ordre.* (Hesse.)

Les plans donnés étant $0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_7$, considérons la surface indéterminée

$$(1) \qquad 0 = \sum_1^4 \lambda P^2 = \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2,$$

et constatons d'abord que l'on peut disposer des rapports arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ de manière que les plans restants P_5, P_6, P_7 soient polairement conjugués, deux à deux, par rapport à la surface (1). Posons, à cet effet,

$$(5) \qquad P_5 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4,$$
$$(6) \qquad P_6 = b_1 P_1 + \ldots \quad \ldots\ldots + b_4 P_4,$$
$$(7) \qquad P_7 = c_1 P_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_4 P_4;$$

le pôle (p_1, p_2, p_3, p_4) du plan $P_5 = 0$ sera déterminé par l'identification des équations

$$0 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4,$$
$$0 = \lambda_1 p_1 P_1 + \lambda_2 p_2 P_2 + \lambda_3 p_3 P_3 + \lambda_4 p_4 P_4,$$

ou par cette suite de proportions $\frac{\lambda_1 p_1}{a_1} = \frac{\lambda_2 p_2}{a_2} = \ldots$ que l'on peut écrire

$$(5') \qquad p_1 : \frac{a_1}{\lambda_1} = p_2 : \frac{a_2}{\lambda_2} = p_3 : \frac{a_3}{\lambda_3} = p_4 : \frac{a_4}{\lambda_4}.$$

D'ailleurs, le pôle 5′ du plan (5) devant appartenir à chacun des plans *conjugués* (6), (7), on devra poser

$$\frac{a_1 b_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_2}{\lambda_2} + \frac{a_3 b_3}{\lambda_3} + \frac{a_4 b_4}{\lambda_4} = 0,$$

$$\frac{a_1 c_1}{\lambda_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a_4 c_4}{\lambda_4} = 0.$$

Les plans (5), (6), (7) seront donc conjugués deux à deux par rapport à la surface (1), si l'on détermine les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, ou leurs inverses $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots$, à l'aide des trois équations linéaires

$$(\lambda) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1 b_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_2}{\lambda_2} + \frac{a_3 b_3}{\lambda_3} + \frac{a_4 b_4}{\lambda_4} = 0, \\ \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{b_4 c_4}{\lambda_4} = 0, \\ \frac{c_1 a_1}{\lambda_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{c_4 a_4}{\lambda_4} = 0: \end{array} \right.$$

le système des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ est donc déterminé, ainsi que la surface (1).

Si l'on conçoit maintenant le plan polaire

$$P_8 = 0$$

du point $0 = P_5 = P_6 = P_7$ par rapport à la surface déterminée (1), les deux tétraèdres qui résultent des huit plans

$$0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4, \quad 0 = P_5 = P_6 = P_7 = P_8$$

sont isolément conjugués par rapport à la surface (1). Le corollaire I est donc applicable; et l'on en conclut que toute surface du second ordre menée tangentiellement aux plans $P_1, P_2, \ldots, P_7$ est d'elle-même tangente au plan $P_8 = 0$.

Théorème corrélatif. — *Toute surface du second ordre, menée par sept points donnés, passe d'elle-même par un huitième point déterminé, et ces huit points sont les sommets de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une autre surface du second ordre.*

(Lamé-Hesse.)

Nous donnerons plus loin une construction nouvelle de ce huitième point, et quelques propriétés d'involution de l'hexaèdre et de l'octaèdre, résultant de ces théorèmes.

26. Le lieu des pôles d'un plan donné $Q = 0$ par rapport à toutes les surfaces du second ordre tangentes aux plans $P_1, P_2, \ldots, P_7$ est le plan Q' défini par l'identité suivante :

$$\sum_1^7 \lambda P^2 \equiv Q.Q'.$$

27. Lemme. — *Neuf plans* $P_1, P_2, \ldots, P_9$ *étant tels que la fonction* $\sum_1^9 \lambda P^2$ *soit identiquement nulle, ou que l'on ait l'*identité

$$(1) \qquad \sum_1^9 \lambda P^2 \equiv 0:$$

toute surface du second ordre menée tangentiellement à huit de ces plans est d'elle-même tangente au neuvième.

Corollaire. — Toute surface du second ordre menée tangentiellement à huit plans quelconques est d'elle-

même inscrite à une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe gauche de la quatrième classe. (HESSE.)

28. LEMME. — *Dix plans* $o = P_1 = P_2 = \ldots = P_{10}$ *étant tels que la fonction* $\sum_1^{10} \lambda P^2$ *puisse être identiquement nulle, ou que l'on ait l'identité*

$$(1) \qquad \sum_1^{10} \lambda P^2 \equiv o :$$

ces dix plans sont tangents à une même surface du second ordre.

Considérons, en effet, la surface du second ordre déterminée par les neuf plans tangents $o = P_1 = \ldots = P_9$; et le système des plans diamétraux de cette surface représenté par l'équation

$$(2) \qquad \sum_1^9 \lambda' P^2 = o$$

réduite au premier degré en x, y, z, à l'aide des coefficients. Éliminant l'un des carrés P_1^2, entre l'identité (1) et l'équation (2), l'équation résultante

$$(2') \qquad \sum_2^{10} \lambda'' P^2 = o$$

représentera encore les plans diamétraux de la surface (1, 2,..., 9) définie par les neuf plans tangents $P_1, \ldots, P_9$. D'ailleurs, comme l'équation équivalente (2), l'équation (2') est du premier degré en x, y, z, et représente, dès lors, les plans diamétraux de la surface du second ordre (2, 3,..., 10) définie par les neuf plans tangents $P_2, \ldots, P_9, P_{10}$. Les deux surfaces (1, 2,..., 9) et (2, 3,..., 10) ont donc les mêmes plans diamétraux, le même centre et huit plans tangents communs : elles coïncident, et les six

plans donnés sont tangents à la surface unique qui résulte de cette coïncidence. La proposition corrélative sera établie et généralisée plus loin.

29. Le théorème du n° 24, relatif à deux tétraèdres isolément conjugués, peut être considéré comme faisant, dans l'espace, l'analogue du théorème plan, suivant lequel les six côtés de deux triangles isolément conjugués par rapport à une même conique sont tangents à une seconde conique. L'analogie toutefois est double; et parallèlement à la voie suivie par M. Hesse, il en est une autre qui aura peut-être une plus large issue, mais qui demanderait, pour être parcourue jusqu'au bout, un peu de cette profonde Géométrie, si familière à l'illustre analyste. On y rencontre, dès le début, en même temps que le théorème de Pappus et son corrélatif, transportés aux surfaces du second ordre, certaines propriétés descriptives de dix points ou de dix plans tangents de ces surfaces, qui ne se prêtent pas, il est vrai, aux mêmes usages que les théorèmes de Pascal et de Brianchon, mais qui méritent d'être notées, en attendant mieux.

Voici d'abord cette seconde analogie, susceptible de deux énoncés distincts.

30. *Si deux pentaèdres sont isolément conjugués par rapport à une même surface du second ordre, les plans des faces de ces pentaèdres sont dix plans tangents d'une autre surface du second ordre*. Réciproquement, *si l'on sépare dix plans tangents d'une telle surface en deux groupes de cinq plans, les plans de chaque groupe déterminent un pentaèdre, et les deux pentaèdres résultants sont isolément conjugués par rapport à une même surface du second ordre.*

Soient, en effet,

$$o = P_1 = P_2 = \ldots = P_5 \quad \text{et} \quad o = P_6 = P_7 = \ldots = P_{10}$$

les plans des faces des deux pentaèdres donnés, conjugués l'un et l'autre à une même surface du second ordre : c'est-à-dire tels que le plan polaire, pris par rapport à cette surface, de chacun de leurs sommets passe par l'arête opposée. D'après cette définition, il est aisé de voir que l'équation de la surface conjuguée peut s'écrire indifféremment

$$(1) \qquad \sum_1^5 \lambda P^2 = 0,$$

ou

$$(2) \qquad \sum_6^{10} \lambda P^2 = 0.$$

Et il résulte, de l'équivalence de ces deux équations, l'identité

$$(3) \qquad \sum_1^{10} \lambda P^2 \equiv 0,$$

ou, d'après le lemme, l'analogie énoncée.

Quant à la proposition réciproque, elle résulterait dans un ordre inverse, du dédoublement de l'identité (3), actuellement donnée, suivant les deux équations équivalentes (1) et (2).

31. De même, *un tétraèdre et un hexaèdre étant isolément conjugués* (voir le n° 17) *par rapport à une première surface du second ordre : les plans de leurs faces sont dix plans tangents d'une autre surface du second ordre.* Réciproquement, *Si l'on sépare dix plans tangents d'une surface du second ordre en deux groupes inégaux, le premier composé de six plans, le second de quatre : l'hexaèdre et le tétraèdre résultant des plans de chaque groupe sont isolément conjugués par rapport à une même surface du second ordre.*

La surface conjuguée des deux polyèdres est repré-

sentée, en effet, dans la proposition directe, par l'une ou l'autre de ces équations *équivalentes*

$$(1) \qquad \sum_1^6 \lambda P^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \sum_7^{10} \lambda P^2 = 0.$$

Et l'on en déduit l'identité

$$(3) \qquad \sum_1^{10} \lambda P^2 \equiv 0.$$

Suivant la proposition réciproque, l'identité (3) est donnée, et les équations (1), (2) sont équivalentes. Les propositions corrélatives se rapportent aux polygones gauches de quatre, cinq, six sommets, polairement conjugués à une surface du second ordre.

On verra un peu plus loin le rôle de ces analogies; et que, si elles ne paraissent pas immédiatement résolubles en une propriété *descriptive* suffisamment simple d'un système de dix points ou de dix plans tangents d'une surface du second ordre, elles fournissent du moins les propriétés métriques qui correspondent au théorème de Pappus et à son corrélatif.

VII.

32. Les théorèmes connus, relatifs aux divisions proportionnelles, ou homographiques, déterminées par toutes les autres tangentes sur deux tangentes fixes d'une parabole, ou d'une conique quelconque, peuvent se déduire des deux identités

$$(1) \qquad \sum_1^5 \lambda P^2 \equiv \text{const.},$$

$$(2) \qquad \sum_1^6 \lambda P^2 \equiv 0,$$

auxquelles donnent lieu cinq tangentes d'une parabole, six tangentes d'une conique quelconque. Prenant pour axes des x, y deux de ces tangentes, l'identité générale (2) devient

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \sum_1^4 \lambda_1 \left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} - 1\right)^2 \equiv 0.$$

Développant, égalant à zéro les coefficients des termes en x^2, y^2, xy, x, y, x^0, et éliminant α, β, $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, entre les six équations résultantes, on trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 b_1} & \frac{1}{a_2 b_2} & \frac{1}{a_3 b_3} & \frac{1}{a_4 b_4} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{b_3} & \frac{1}{b_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport aux éléments de la première colonne, supprimant les indices 1 et chassant les dénominateurs,

$$\text{(I)} \qquad k.ab + \alpha.a + \beta.b + \gamma = 0.$$

Telle est la relation entre l'abscisse et l'ordonnée à l'origine d'une tangente quelconque. Il résulte de la forme de cette relation, que les traces a et b d'une tangente variable, sur les deux tangentes fixes ox et oy, déterminent sur ces dernières deux divisions homographiques. On pourrait d'ailleurs écrire *à priori* la relation (I) et, après y avoir mis en évidence les coordonnées $X = -\frac{\beta}{2k}$, $Y = -\frac{\alpha}{2k}$ du centre de la courbe, en déduire par une autre analyse les résultats obtenus au § I.

33. Opérant de même sur l'identité $\sum_1^{10} \lambda P^2 \equiv 0$, re-

lative à dix plans tangents d'une surface du second ordre, et prenant encore trois des dix plans tangents pour plans des x, y, z, on aurait d'abord

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \sum_1^7 \lambda_1 \left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} - 1\right)^2 = 0.$$

Développant ensuite, égalant à zéro les coefficients des termes en x^2, y^2, z^2, $xy, \ldots$, x, y, z, x^0, et éliminant les indéterminées α, β, γ, λ_1, $\lambda_2, \ldots$, λ_7, on obtiendrait la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 b_1} & \frac{1}{a_2 b_2} & \cdots & \frac{1}{a_7 b_7} \\ \frac{1}{b_1 c_1} & \frac{1}{b_2 c_2} & \cdots & \frac{1}{b_7 c_7} \\ \frac{1}{c_1 a_1} & \frac{1}{c_2 a_2} & \cdots & \frac{1}{c_7 a_7} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_7} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \cdots & \frac{1}{b_7} \\ \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \cdots & \frac{1}{c_7} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De là, en ordonnant par rapport aux éléments de la première colonne, supprimant les indices 1 et chassant les dénominateurs,

$$\text{(II)} \quad k.abc + \alpha.bc + \beta.ca + \gamma.ab + \alpha'.a + \beta'.b + \gamma'.c = 0.$$

Telle est la dépendance entre les trois segments a, b, c déterminés par un plan tangent quelconque sur les arêtes x, y, z d'un trièdre circonscrit. On aurait pu écrire, *à priori*, l'équation (II), en remarquant que le nombre des paramètres indéterminés contenus dans la relation cherchée

$\varphi(a, b, c) = 0$ ne pouvant être supérieur à six, le nombre de ses termes ne peut d'abord dépasser *sept*; que, d'ailleurs, cette relation doit être algébrique et du premier degré par rapport à chacune des lettres a, b, c : toutes conditions déjà remplies par la forme (II), et par cette forme seulement. L'équation (II) obtenue de la sorte, on peut y mettre en évidence les coordonnées $\left(X = -\frac{\alpha}{2k}, Y = -\frac{\beta}{2k}, Z = -\frac{\gamma}{2k}\right)$ du centre de la surface, et en déduire une autre analyse des problèmes traités dans le § II.

(*La suite prochainement.*)

DEUX THÉORÈMES SUR LA DÉCOMPOSITION DE CERTAINES EXPRESSIONS EN DEUX CARRÉS;

PAR M. S. REALIS.

Les deux théorèmes dont il s'agit peuvent être énoncés au moyen d'une formule unique, qui est la suivante :

$$1 \pm \sum \alpha_1^2 + \sum (\alpha_1\alpha_2)^2 \pm \sum (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 + \sum (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2 \pm \ldots$$
$$= \left[1 \mp \sum(\alpha_1\alpha_2) + \sum(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \mp \sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_6) \pm \ldots\right]^2$$
$$\pm \left[\sum \alpha_1 \mp \sum(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_5) \mp \sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_7) + \ldots\right]^2.$$

$\sum \alpha_1$ et $\sum (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ désignent la somme de n quantités données $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, et la somme des produits de ces quantités k à k; $\sum \alpha_1^2$ et $\sum (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)^2$ dé-

signent de même la somme des n carrés $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \ldots, \alpha_n^2$, et celle des produits de ces carrés k à k; les signes supérieurs et inférieurs se correspondent partout entre eux; la succession des termes $\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)^2$, et celle des termes $\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k)$ ne vont pas au delà de

$$\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2 = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^2$$

et de

$$\sum(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$

respectivement.

On a ainsi, par le premier théorème (signes supérieurs),

$$1+(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2 = (1-\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2,$$
$$1+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)+\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$= [1-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)]^2+[(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta\gamma]^2,$$
$$1+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+(\alpha^2\beta^2+\ldots+\gamma^2\delta^2)+(\alpha^2\beta^2\gamma^2+\ldots\beta^2\gamma^2\delta^2)$$
$$+\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 = [1-(\alpha\beta+\ldots+\gamma\delta)+\alpha\beta\gamma\delta]^2$$
$$+[(\alpha+\ldots+\delta)-(\alpha\beta\gamma+\ldots+\beta\gamma\delta)]^2,$$

....

L'expression constituant le premier membre de chacune de ces égalités peut donc être transformée en une somme de deux carrés au moyen de formules directes. Et comme il est permis de changer, dans le second membre, les signes des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, à volonté, la décomposition dont il s'agit pourra généralement être faite de plusieurs manières différentes. Cette remarque est commune aux deux théorèmes compris dans la formule générale ci-dessus.

Par le deuxième théorème (signes inférieurs) on a

$$1-(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2=(1+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)^2,$$

$$1-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)-\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$=[1+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)]^2-[(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta\gamma]^2,$$

$$1-(\alpha^2+\ldots+\delta^2)+(\alpha^2\beta^2+\ldots+\gamma^2\delta^2)-(\alpha^2\beta^2\gamma^2+\ldots+\beta^2\gamma^2\delta^2)$$
$$+\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2=[1+(\alpha\beta+\ldots+\gamma\delta)+\alpha\beta\gamma\delta]^2$$
$$-[(\alpha+\ldots+\delta)+(\alpha\beta\gamma+\ldots+\beta\gamma\delta)]^2;$$

. . . .

par où l'on voit que la somme algébrique exprimée par le premier membre de ces formules peut toujours être changée en une différence de deux carrés que l'on sait construire directement.

Remarque. — On énonce aussi les propositions qui précèdent en disant que *si* $f(z)=z^n-az^{n-1}+\ldots=0$ *est l'équation aux carrés des racines de l'équation*

$$x^n-A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}-A_3x^{n-3}+\ldots=0,$$

on aura

$$(-1)^n f(-1)$$
$$=(1-A_2+A_4-A_6+\ldots)^2+(A_1-A_3+A_5-\ldots)^2,$$

et

$$f(1)=(1+A_2+A_4+A_6+\ldots)^2-(A_1+A_3+A_5+\ldots)^2.$$

Ainsi, une équation $f(z)=0$, à coefficients rationnels, étant donnée, si les nombres $(-1)^n f(-1)$ et $f(1)$ ne sont pas réductibles à la fois, le premier à une somme de deux carrés, et le deuxième à une différence de deux carrés, par cela seul on sera en droit de conclure que toutes les racines de cette équation ne sont pas des carrés.

QUESTION D'EXAMEN;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Trouver les racines réelles de l'équation $a^x + b^x = c^x$ *dans laquelle* a, b, c *sont des nombres positifs.*

Je remarque d'abord que si les trois nombres a, b, c sont plus petits que l'unité, $+\infty$ est une solution de l'équation; de même $-\infty$ serait une solution si les trois nombres étaient plus grands que l'unité.

Lorsque $a = b$, l'équation peut se résoudre immédiatement; en effet,

$$2a^x = c^x, \quad x = \frac{\log 2}{\log c - \log a}.$$

Lorsque a diffère de b, on peut supposer $a > b$, ce qui donne lieu à trois cas.

Premier cas : $c > a > b$. — Je divise les deux membres de l'équation par c^x, en tenant compte, s'il y a lieu, de la solution infinie donnée par $c^x = 0$, et j'ai

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1;$$

$\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ sont plus petits que l'unité; le premier membre est une fonction constamment décroissante, égale à 2 quand x est nul, et nulle quand x est infini; il y a donc une seule racine qui est positive. On la sépare facilement en remarquant que

$$2\left(\frac{a}{c}\right)^x > 1, \quad 2\left(\frac{b}{c}\right)^x < 1,$$

d'où

$$\frac{\log 2}{\log c - \log b} < x < \frac{\log 2}{\log c - \log a}.$$

Deuxième cas : $c < b < a$. — On reconnaît par le même moyen l'existence d'une seule racine qui est négative.

Troisième cas : $a > c > b$. — Il n'y a pas de racine réelle, car pour toute valeur positive de x

$$a^x > c^x, \quad \text{et à fortiori} \quad a^x + b^x > c^x;$$

pour toute valeur négative de x,

$$b^x > c^x, \quad \text{et à fortiori} \quad a^x + b^x > c^x.$$

Remarque. — Cette question a été posée le 30 mars 1865, à Poitiers, aux candidats pour le baccalauréat ès sciences : il serait superflu de s'enquérir si elle a été résolue.

Remarque. — Le nombre des racines imaginaires sera en général infini et leur recherche compliquée; nous nous contenterons d'un exemple très-simple. Soit

$$a = me^2, \quad b = me, \quad c = m;$$

e étant la base des logarithmes népériens,

$$e^{2x} + e^x = 1, \quad e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad x = l.\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

On voit que x a une infinité de valeurs imaginaires et une seule valeur réelle.

NOTE SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ DE LA QUESTION DU PENDULE CONIQUE (*);

PAR M. DIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

M. Sturm a très-heureusement perfectionné la théorie du pendule conique par une ingénieuse disposition de l'équation du troisième degré qui s'y rencontre. Il lui a donné, comme on sait, la forme

$$(l^2 - z^2)(z - z_0 + h) - (l^2 - z_0^2)h\cos^2\varepsilon = 0,$$

d'après laquelle on voit qu'elle a toujours trois racines réelles :

1° Une racine négative inférieure à $-l$ et même à $-(h - z_0)$ pour le cas de $h - z_0 > l$, car $-l$ et $z_0 - h$ donnent tous deux le résultat négatif $-(l^2 - z_0^2)h\cos^2\varepsilon$;

2° Deux racines de signe ambigu dont l'une entre $-l$ ou $-(h - z_0)$ et z_0, et l'autre entre z_0 et l, car z_0 donne le résultat positif $(l^2 - z_0^2)h\sin^2\varepsilon$, et l donne le même résultat négatif que $-l$.

Quelque chose reste, je crois, à désirer dans la discussion de ces deux dernières racines, dont il est nécessaire de fixer les limites d'une manière plus précise pour exprimer le temps en fonction elliptique, comme M. Sturm l'a fait. a désignant la plus grande des deux et b la plus petite, il faut que l'expression

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{l^2 + 2ab + l^2}}}$$

(*) *Cours de Mécanique* par M. STURM, publié par M. PROUHET, 44e leçon.

[formule (2), page 182] reste réelle quand φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$. Or, cela exige effectivement que la quantité $\frac{a^2 - b^2}{l^2 + 2ab + a^2}$ se trouve comprise entre o et 1. M. Sturm, dont la pénétration était si grande, avait sans doute vu que ces conditions sont toujours remplies; mais il ne l'a pas établi dans son cours écrit. C'est ce que je vais faire dans cette Note.

La plus grande a des trois racines de l'équation est positive quand z_0 est positif, puisqu'elle se trouve entre z_0 et l. Elle est encore positive lorsque z_0 est négatif, car on a

$$l^2(h \sin^2 \varepsilon - z_0) + z_0^2 h \cos^2 \varepsilon$$

pour $z = 0$, c'est-à-dire un résultat positif, en sorte qu'elle se trouve entre o et l dont le résultat de substitution est négatif.

Quand la racine b est positive, on a $a^2 - b^2 > 0$. Pour savoir si cette inégalité subsiste lorsque b est négative, ou, en d'autres termes, si $-b$ est inférieur à a, je substitue $-a$, ce qui donne

$$a^3 + (z_0 - h)a^2 - l^2 a - l^2(z_0 - h) - (l^2 - z_0^2) h \cos^2 \varepsilon.$$

Il n'est pas possible de discerner immédiatement le signe de ce résultat; mais la remarque que

$$-a^3 + (z_0 - h)a^2 + l^2 a - l^2(z_0 - h) - (l^2 - z_0^2) h \cos^2 \varepsilon$$

est nul, puisque a est par hypothèse une racine de l'équation, permet de réduire à

$$-2a(l^2 - a^2)$$

l'expression précédente, et l'on voit enfin que $-a$ donne un résultat négatif. On a donc dans tous les cas

$$a^2 - b^2 > 0,$$

et de plus

$$l^2 - b^2 > a^2 - b^2.$$

Joignant à ces deux inégalités l'inégalité évidente

$$a^2 + 2ab + b^2 > 0,$$

on obtient

$$l^2 + 2ab + a^2 > a^2 - b^2 > 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DU THÉORÈME DE MAC-CULLAGH SUR LE TRIANGLE INSCRIT DANS L'ELLIPSE

Extension au cas de l'hyperbole et de la parabole (*)

(voir t. IX, p. 296);

PAR M. MISTER,
Professeur à l'Athénée royal de Bruges,
ET M. NEUBERG,
Professeur à l'École Normale de Nivelles.

---

1. THÉORÈME. — *Un triangle étant inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle, divisé par le produit des deux demi-axes.*

Ce théorème revient au suivant qui le rend applicable aux trois courbes : *Le carré du rayon du cercle circonscrit est égal au produit des trois cordes passant par le foyer parallèlement aux côtés du triangle, divisé par quatre fois le paramètre de la conique.*

(*) Le théorème restait à démontrer pour l'hyperbole (voir *Nouvelles Annales*, t. IX, p. 298), et n'a été démontré géométriquement que pour l'ellipse.

Rapportons l'ellipse à ses axes principaux, son équation sera

$$(1) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

La circonférence circonscrite au triangle ABC rencontre l'ellipse en un quatrième point D, et si l'on appelle

$$y = mx + p,$$
$$y = m'x + p'$$

les équations de deux sécantes communes au cercle et à l'ellipse, et

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 - R^2 = 0$$

l'équation de la circonférence, celle de l'ellipse pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (y - mx - p)(y - m'x - p') \\ \quad + \lambda[(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 - R^2] = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation devant être identiquement la même que la première, on devra avoir

$$(3) \qquad m + m' = 0,$$
$$(4) \qquad p + p' = -2\lambda\beta,$$
$$(5) \qquad mp' + m'p = 2\lambda\alpha,$$
$$(6) \text{ et } (7) \qquad \frac{1 + \lambda}{a^2} = \frac{\lambda}{b^2} = -\frac{pp' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{a^2 b^2}.$$

De la première de ces équations on tire $m' = -m$, ce qui indique que, dans un même système, les sécantes communes sont également inclinées sur le grand axe, mais en sens contraires.

De l'avant-dernière on tire

$$\lambda = \frac{a^2 m^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

ensuite les équations (4) et (5) donnent

$$p' + p = -2\lambda\beta,$$
$$p' - p = \frac{2\lambda\alpha}{m};$$

élevons au carré et retranchons, nous aurons

$$pp' = \lambda^2\left(\beta^2 - \frac{\alpha^2}{m^2}\right).$$

Remplaçons ces valeurs dans l'équation (7) mise sous la forme

$$b^2(1+\lambda) + pp' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0;$$

elle deviendra, réductions faites,

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} m^2a^2b^2(1+m^2)(a^2-b^2) \\ \quad + (a^2m^2+b^2)[(1+m^2)(a^2\beta^2m^2 - b^2\alpha^2) \\ \qquad\qquad - R^2m^2](a^2-b^2)] = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation développée est du sixième degré en m; elle donne par conséquent les inclinaisons des six sécantes communes. Ces six valeurs de m sont égales deux à deux et de signes contraires; les carrés des valeurs de m, dans chaque système de sécantes communes, sont donc égaux, et comme les trois côtés du triangle ABC font partie de chaque système, il en résulte que l'équation précédente, étant résolue par rapport à m^2, donnera les carrés des inclinaisons des trois côtés du triangle ABC.

Cela posé, menons un diamètre parallèle à la droite $y = mx + p$; la longueur d de ce diamètre sera donnée par

$$d^2 = \frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2},$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{b^2(a^2 - d^2)}{a^2(d^2 - b^2)},$$

et par suite

$$1 + m^2 = \frac{d^2(a^2 - b^2)}{a^2(d^2 - b^2)}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (8), le facteur commun $(a^2 m^2 + b^2)$ pourra se supprimer et l'on aura, pour déterminer d, l'équation

$$d^6 - [a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)]d^4 \\ - [a^2 b^2 + a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - R^2(a^2 - b^2)]d^2 - R^2a^2b^2 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en d^2; par conséquent, en appelant d^2, d'^2, d''^2 les trois racines, on aura

$$d^2d'^2d''^2 = R^2a^2b^2,$$

d'où

$$R = \frac{dd'd''}{ab}.$$

2. Énoncé de la seconde manière, le théorème peut se démontrer avec la même facilité. Si par le foyer d'une ellipse nous menons une corde MFN parallèle à la droite $y = mx + p$, en appelant α l'angle qu'elle fait avec le grand axe, on sait que l'on a

$$FN = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{et} \quad FM = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha},$$

d'où l'on tire, en additionnant et appelant l la longueur de la corde,

$$l = \frac{\frac{2b^2}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha}.$$

Or, la corde étant parallèle à la droite $y = mx + p$, on a $\tang \alpha = m$, et par suite

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + m^2}.$$

Substituons dans la valeur de l et observons que $c^2 = a^2 - b^2$, il vient

$$l = \frac{2ab^2(1 + m^2)}{a^2m^2 + b^2}.$$

On pourrait tirer de là la valeur de m^2 et la porter dans l'équation (8) ; on aurait une équation du troisième degré en l qui donnerait la valeur du produit des trois racines ; mais si l'on rapproche cette valeur de l de celle de d^2 qui est

$$d^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2},$$

on voit que l'on a

$$\frac{d^2}{l} = \frac{a}{2}, \quad \text{d'où} \quad d^2 = \frac{a}{2} \cdot l.$$

La même relation subsiste entre les autres valeurs, et en substituant dans

$$d^2 d'^2 d''^2 = R^2 a^2 b^2,$$

il vient

$$ll'l'' \cdot \frac{a^3}{8} = R^2 a^2 b^2,$$

d'où l'on tire

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8 \frac{b^2}{a}}.$$

Et comme $\frac{2b^2}{a}$ représente le paramètre $2P$ de l'ellipse, on peut écrire

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8P}.$$

3. La solution que nous venons de donner s'étend d'elle-même au cas de l'hyperbole. Il suffit pour cela d'identifier l'équation (2) avec celle de l'hyperbole,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les calculs se traitent de la même manière, ils ne diffèrent des précédents que par le changement de b^2 en $-b^2$, et l'on parvient facilement à l'équation

$$\begin{aligned} &- m^2a^2b^2(1+m^2)(a^2+b^2) \\ &\quad + (a^2m^2-b^2)[(1+m^2)(a^2\beta^2m^2+b^2\alpha^2) - R^2m^2(a^2+b^2)] = 0; \end{aligned}$$

mais comme on a aussi

$$d^2 = -\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2-b^2},$$

on aura, comme pour l'ellipse, pour déterminer d^2, l'équation du troisième degré

$$(9)\left\{\begin{aligned} &d^6 - [\alpha^2 - b^2 - (\alpha^2+\beta^2-R^2)]d^4 \\ &\quad - [-a^2b^2+a^2\beta^2-b^2\alpha^2-R^2(a^2+b^2)]d^2+R^2a^2b^2=0. \end{aligned}\right.$$

Or, ici deux cas sont possibles : si le triangle inscrit dans l'hyperbole a ses trois sommets sur la même branche de courbe, les diamètres menés parallèlement aux côtés du triangle ABC, ne rencontrant pas la courbe, seront imaginaires, et les trois racines de l'équation précédente seront négatives; dans le cas contraire, deux diamètres seront réels et le troisième imaginaire, deux des racines seront positives et la troisième négative. En représentant les trois racines, dans le premier cas, par $-d^2$, $-d'^2$, $-d''^2$, et dans le second par $-d^2$, d'^2, d''^2, on aura chaque fois

$$-d^2d'^2d''^2 = -R^2a^2b^2, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{dd'd''}{ab}.$$

La formule est donc la même; seulement, dans le cas de l'hyperbole, les trois diamètres seront imaginaires, ou bien deux seront réels et le troisième imaginaire.

4. La seconde forme donnée à l'énoncé dans le cas de l'hyperbole a l'avantage de faire disparaître toute trace d'imaginaire, car les cordes menées par le foyer parallèlement aux trois côtés du triangle seront toujours réelles. Pour avoir leurs longueurs, rappelons-nous qu'un rayon vecteur est donné par l'une ou l'autre des deux formules

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{-\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha},$$

selon que son extrémité M est située sur l'une ou l'autre branche de courbe.

Lorsque le triangle inscrit a ses sommets sur une même branche de courbe, les cordes menées par le foyer parallèlement aux trois côtés ne coupent, non plus, qu'une seule branche, et l'on fera exclusivement usage de la première formule

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha}.$$

On aura donc, comme dans le cas de l'ellipse, pour les deux parties FM, FN d'une même corde MFN de longueur l,

$$\mathrm{FN} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \mathrm{FM} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha},$$

et, en additionnant,

$$\text{FN} + \text{FM} \quad \text{ou} \quad l = \frac{\frac{2b^2}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha}.$$

Comme $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+m^2}$ et $c^2 = a^2 + b^2$, il vient, pour la valeur de l,

$$l = \frac{2ab^2(1+m^2)}{a^2m^2 - b^2}.$$

En la comparant avec la valeur de d^2 qui est

$$d^2 = -\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2 - b^2},$$

on trouve

$$\frac{d^2}{l} = -\frac{a}{2}, \quad \text{d'où} \quad d^2 = -\frac{a}{2}\cdot l.$$

On aurait de même $d'^2 = -\frac{a}{2}l'$, $d''^2 = -\frac{a}{2}l''$ pour les deux autres cordes, et comme, dans l'équation (9), le produit des trois racines est négatif et égal à $-\text{R}^2a^2b^2$, en remplaçant dans le produit les trois racines par les trois valeurs que nous venons de trouver, il viendra

$$-\frac{a^3}{8}ll'l'' = -\text{R}^2a^2b^2,$$

d'où

$$\text{R}^2 = \frac{ll'l''}{8\frac{b^2}{a}} = \frac{ll'l''}{8\text{P}},$$

$\frac{b^2}{a}$ représentant encore la moitié du paramètre.

Lorsque deux des sommets du triangle se trouvent sur l'une des branches et le troisième sur l'autre, deux des cordes couperont les deux branches et la troisième n'en

coupera qu'une. Pour celle-ci on aura, comme précédemment,

$$d^2 = -\frac{a}{2} l:$$

Pour chacune des deux autres, on remarquera que sa longueur est égale à une différence de deux rayons vecteurs dont le premier est donné par

$$\text{FM} = \frac{-\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{c}{a}\cos\alpha - 1},$$

et le second par

$$\text{FN} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\alpha}.$$

On aura donc

$$l' = \text{FM} - \text{FN} = \frac{\frac{2b^2}{a}}{\frac{c^2}{a^2}\cos^2\alpha - 1}$$

ou

$$l' = \frac{-2ab^2(1+m^2)}{a^2m^2 - b^2},$$

et par suite

$$\frac{d'^2}{l'} = \frac{a}{2} \quad \text{ou} \quad d'^2 = \frac{a}{2} \cdot l'.$$

On aurait de la même manière

$$d''^2 = \frac{a}{2} l''.$$

Substituant ces valeurs dans le produit des trois racines

de l'équation (9), on obtient, comme dans le premier cas,

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8P}.$$

5. La parabole étant une variété de l'ellipse ou de l'hyperbole, on peut en conclure que le théorème précédent subsiste dans le cas de la parabole. On peut cependant le démontrer directement de la manière suivante.

En identifiant l'équation (2) avec celle de la parabole

$$y^2 = 2Px;$$

on obtient cette suite d'égalités

$$m + m' = 0, \quad \text{d'où} \quad m' = -m,$$
$$mm' + \lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = m^2,$$
$$p + p' + 2\lambda\beta = 0,$$
$$pm' + p'm - 2\lambda\alpha = -2P(1 + \lambda),$$
$$pp' + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0.$$

Éliminons m', λ, p, p' entre ces équations, il vient, pour l'équation en m,

$$(10) \quad m^4\beta^2(1+m^2) - m^4R^2 - P^2(1+m^2)^2 + 2P\alpha m^2(1+m^2) = 0.$$

Or, si par le foyer de la parabole on mène une corde parallèle à la droite $y = mx + p$, la longueur de cette corde sera donnée par la somme des deux rayons vecteurs

$$FM = \frac{P}{1 - \cos\alpha} \quad \text{et} \quad FN = \frac{P}{1 + \cos\alpha}.$$

On a ainsi

$$l = FM + FN = \frac{2P}{\sin^2\alpha};$$

or, $\sin^2\alpha = \dfrac{m^2}{1 + m^2}$; donc la longueur de la corde sera

30.

donnée par

$$l = \frac{2P(1 + m^2)}{m^2},$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{2P}{l - 2P} \quad \text{et} \quad 1 + m^2 = \frac{l}{l - 2P}.$$

Substituons dans l'équation (10) et ordonnons par rapport à l, il vient

$$l^3 - (2P + 4\alpha)l^2 + 4(R^2 - \beta^2 + 2P\alpha)l - 8R^2P = 0.$$

Cette équation est du troisième degré en l; elle donne les longueurs des trois cordes menées par le foyer parallèlement aux trois côtés du triangle; par conséquent, en appelant l, l', l'' les trois racines, nous aurons

$$ll'l'' = 8R^2P,$$

d'où

$$R^2 = \frac{ll'l''}{8P}.$$

6. Observons, pour terminer, que les trois équations en m que nous venons de trouver ne changeant pas quand on y remplace m par $-m$, il en résulte que le théorème subsiste encore lorsque les angles d'inclinaison des trois cordes sur le grand axe sont remplacés par les angles supplémentaires.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 735

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 144);

PAR M. ARTHUR POUSSART,
Élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin).

Le lieu des centres des coniques tangentes aux côtés d'un triangle et telles, que les normales menées par les points de contact se rencontrent en un même point, est une courbe du troisième degré qui passe par les sommets du triangle, le point de rencontre des hauteurs, le centre de gravité, les centres des cercles inscrit et ex-inscrits, les milieux des côtés, les milieux des hauteurs. (THOMSON.)

Si $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ sont les équations des côtés du triangle; α, β, γ les points de contact, l'équation générale des coniques inscrites est

$$a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2-2bcYZ-2acXZ-2abXY=0,$$

a, b, c étant des constantes indéterminées.

Soient les équations de trois droites parallèles aux hauteurs du triangle

$$(\mathrm{H}a)\qquad Y\cos B = Z\cos C + K_1,$$
$$(\mathrm{H}b)\qquad Z\cos C = X\cos A + K_2,$$
$$(\mathrm{H}c)\qquad X\cos A = Y\cos B + K.$$

La condition pour que ces trois droites soient concourantes est

$$K+K_1+K_2=0.$$

J'exprime que la Ha perpendiculaire au côté ayant pour équation $Z=0$ passe par le point γ dont les coordonnées sont définies par les relations

$$\gamma \left\{ \begin{aligned} Z &= 0, \\ aX &= bY, \\ X\sin A + Y\sin B &= \frac{S}{R}, \end{aligned} \right. \quad \text{ou} \quad \gamma \left\{ \begin{aligned} Z &= 0, \\ Y &= \frac{S}{R}\,\frac{a}{b\sin A + a\sin B}, \\ X &= \frac{S}{R}\,\frac{b}{b\sin A + a\sin B}, \end{aligned} \right.$$

A, B, C étant les angles du triangle, S sa surface, R le rayon du cercle circonscrit.

Les coordonnées du point γ doivent vérifier l'équation de Ha; on a, en remplaçant,

$$K = \frac{S}{R}\cdot\frac{b\cos A - a\cos B}{b\sin A + a\sin B};$$

de même,

$$K_1 = \frac{S}{R}\cdot\frac{c\sin B - b\sin C}{c\cos B + b\cos C},$$

$$K_2 = \frac{S}{R}\cdot\frac{a\cos C - c\cos A}{a\sin C + c\sin A}.$$

Mais

$$K + K_1 + K_2 = 0,$$

donc

$$(1)\quad \frac{b\cos A - a\cos B}{b\sin A + a\sin B} + \frac{c\cos B - b\cos C}{c\sin B + b\sin C} + \frac{a\cos C - c\cos A}{a\sin C + c\sin A} = 0.$$

J'ai ainsi la condition pour que les normales passent par un même point.

$F(X, Y, Z) = 0$ étant l'équation de la courbe, le centre est défini par les équations

$$\frac{F'x}{\sin A} = \frac{F'y}{\sin B} = \frac{F'z}{\sin C},$$

ou ici

$$a\,\frac{aX - cZ - bY}{\sin A} = b\,\frac{bY - cZ - aX}{\sin B} = c\,\frac{cZ - aX - bY}{\sin C} = \lambda,$$

ce qui peut s'écrire :

$$(2)\qquad aX - cZ - bY = \frac{\lambda \sin A}{a},$$

$$(3)\qquad bY - cZ - aX = \frac{\lambda \sin B}{b},$$

$$(4)\qquad cZ - aX - bY = \frac{\lambda \sin C}{c}.$$

J'obtiens, en ajoutant les équations (2) et (3),

$$-2cZ = \lambda\left(\frac{\sin A}{a} + \frac{\sin B}{b}\right)$$

ou

$$(2)\ bis\qquad -2abcZ = \lambda(b \sin A + a \sin B).$$

J'aurai de même, en ajoutant (2) et (4), (3) et (4) :

$$(3)\ bis\qquad -2abcY = \lambda(a \sin C + c \sin A),$$

$$(4)\ bis\qquad -2abcX = \lambda(b \sin C + c \sin B).$$

Des équations (2) *bis*, (3) *bis*, (4) *bis* je tire

$$\frac{b \sin C + c \sin B}{X} = \frac{a \sin C + c \sin A}{Y} = \frac{b \sin A + a \sin B}{Z} = \mu.$$

Je remplace dans l'équation (1) $b \sin C + c \sin B$, etc., par les quantités proportionnelles X, Y, Z, et j'ai

$$(1)\ bis\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{b \cos A - a \cos B}{Z} + \frac{a \cos C - c \cos A}{Y} \\ &+ \frac{c \cos B - b \cos C}{X} = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer μ, a, b, c

entre les équations (1) *bis*, (2) *bis*, (3) *bis*, (4) *bis*, ou

$$
\begin{array}{l}
aX(Z\cos C - Y\cos B) + bY(X\cos A - Z\cos C) + cZ(Y\cos B - X\cos A) = 0 \\
\qquad\qquad\qquad b\sin C \qquad\qquad\qquad\qquad + c\sin B - \mu X = 0 \\
\quad a\sin C \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c\sin A - \mu Y = 0 \\
\quad a\sin B + b\sin A \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \mu Z = 0
\end{array}
$$

Le résultat de l'élimination est

$$
\text{(I)}\quad \begin{vmatrix}
X(Z\cos C - Y\cos B) & Y(X\cos A - 2\cos C) & Z(Y\cos B - X\cos A) & 0 \\
0 & \sin C & \sin B & X \\
\sin C & 0 & \sin A & Y \\
\sin B & \sin A & 0 & Z
\end{vmatrix} = 0
$$

Le lieu est donc une courbe du troisième degré, et sous cette forme on vérifie immédiatement qu'elle passe par :

1° Les sommets du triangle qui ont pour coordonnées

$$
A\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{S}{R\sin A}, \\ Y = 0, \\ Z = 0, \end{array}\right.
\qquad
B\left\{\begin{array}{l} X = 0, \\ Y = \dfrac{S}{R\sin B}, \\ Z = 0, \end{array}\right.
\qquad
C\left\{\begin{array}{l} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = \dfrac{S}{R\sin C}. \end{array}\right.
$$

2° Le point de concours des hauteurs défini par les relations

$$X\cos A = Y\cos B = Z\cos C.$$

L'équation (I) développée est

$$
\text{(II)}\quad \left\{\begin{array}{l}
+\sin A.X(Z\cos C - Y\cos B)(X\sin B + Z\sin C - X\sin A) \\
+\sin B.Y(X\cos A - Z\cos C)(X\sin A - Y\sin B + Z\sin C) \\
+\sin C.Z(Y\cos B - X\cos A)(X\sin A + Y\sin B - Z\sin C)
\end{array}\right\} = 0
$$

On peut encore la mettre sous la forme

$$
\text{(III)}\quad \left\{\begin{array}{l}
XZ(Z\sin C - X\sin A)\sin B + XY(X\sin A - Y\sin B)\sin C \\
\qquad + YZ(Y\sin B - Z\sin C)\sin A = 0.
\end{array}\right.
$$

On vérifie alors facilement que la courbe passe par :

3° Le centre de gravité défini par les égalités

$$X \sin A = Y \sin B = Z \sin C.$$

4° Le centre du cercle inscrit défini par les égalités

$$X = Y = Z.$$

5° Les centres des cercles ex-inscrits qui ont pour coordonnées

$$\begin{cases} X + Y = 0, \\ Y + Z = 0, \\ X - Z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X + Z = 0, \\ Y + Z = 0, \\ X - Y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} X + Z = 0, \\ X + Y = 0, \\ Y - Z = 0. \end{cases}$$

6° Les milieux des côtés définis par les relations

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y \sin B = Z \sin C, \end{cases} \quad \begin{cases} Y = 0, \\ X \sin A = Z \sin C, \end{cases} \quad \begin{cases} Z = 0, \\ X \sin A = Y \sin B. \end{cases}$$

7° Les milieux des hauteurs dont les coordonnées sont

$$\begin{cases} Y = \frac{S}{2R} \frac{\cos A}{\sin C}, \\ X = \frac{S}{2R} \frac{\cos B}{\sin C}, \\ Z = \frac{S}{2R} \frac{1}{\sin C}, \end{cases} \quad \begin{cases} Y = \frac{S}{2R} \frac{1}{\sin B}, \\ X = \frac{S}{2R} \frac{\cos C}{\sin B}, \\ Z = \frac{S}{2R} \frac{\cos A}{\sin B}, \end{cases} \quad \begin{cases} Y = \frac{S}{2R} \frac{\cos C}{\sin A}, \\ X = \frac{S}{2R} \frac{1}{\sin A}, \\ Z = \frac{S}{2R} \frac{\cos B}{\sin A}. \end{cases}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Camille Massing, élève de Sainte-Barbe (cours de M. Tarbourieh); Ed. Widmann, de Strasbourg; C. Benoist, élève du Prytanée militaire; Recoq, élève du lycée de Montpellier; Lacauchie, élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard); Bauquenne, candidat à l'École Normale.

Question 734;

PAR MM. DORBECOURT ET BAILLET,
Élèves de la classe de M. Bouquet, au lycée Louis-le-Grand.

Trouver la condition pour qu'une asymptote d'une conique donnée par l'équation générale du second degré passe à l'origine. (SALMON.)

L'équation qui donne les deux asymptotes d'une hyperbole est

$$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 = 0,$$

dans laquelle M représente $B^2 - 4AC$ et N le binôme $BE - 2CD$, l'équation de la conique étant

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

(*Géométrie analytique* de MM. BRIOT et BOUQUET.)

Pour que l'une quelconque des asymptotes passe par l'origine, il faut et il suffit que son terme constant soit nul, ce qui donne

$$E \pm \frac{N}{\sqrt{M}} = 0.$$

Élevant au carré et remplaçant M et N par leurs valeurs indiquées plus haut, on arrive à la condition

$$AE^2 + CD^2 - BDE = 0.$$

Question 734;

PAR M. FOULON,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Trouver la condition pour qu'une asymptote à une

conique donnée par l'équation générale du second degré passe par l'origine.

Lorsque la conique est rapportée à son centre, les asymptotes sont données par l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0.$$

Soient a, b les coordonnées du centre; l'équation qui donne les asymptotes devient

$$A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 = 0.$$

Pour que l'une des asymptotes passe par l'origine, il faut et il suffit que le terme constant soit nul dans cette dernière équation, c'est-à-dire que

$$Aa^2 + Bab + Cb^2 = 0.$$

Or,

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

En substituant ces valeurs de a et b, on trouve, toute réduction faite, la condition

$$(B^2 - 4AC)(BDE - CD^2 - AE^2) = 0.$$

Note.— Des solutions peu différentes nous ont été adressées par MM. H. Violland, étudiant à Strasbourg; C. Maising, élève de l'Institution Sainte-Barbe; Pilloy, répétiteur au lycée d'Amiens; Bauquenne, candidat à l'École Normale; Niébylowski, élève du lycée Bonaparte; Jules Hatté, élève du lycée Charlemagne.

M. E. Brunelet de Bapaume a résolu la même question pour une surface du second ordre et son cône asymptote, et il est parvenu à cette conclusion que le *discriminant* est proportionnel à l'*invariant;* leur rapport est le terme constant de l'équation du second degré.

Question d'examen;

PAR M. GAY,
Élève du lycée d'Angoulême (classe de M. Dupain).

Étant donnés un cercle O (*), *un diamètre* AB *et une droite* MN, *on propose de tracer une corde parallèle à la droite donnée et divisée par le diamètre en deux segments qui soient entre eux dans le même rapport que deux lignes* m, n.

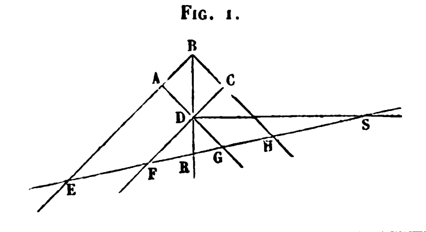
Construction. — Je prolonge le diamètre jusqu'à ce qu'il rencontre en K la droite donnée (ou une parallèle à cette droite). Je prends sur cette droite $KI = m$, et en sens inverse $KF = n$; sur le milieu de IF j'élève une perpendiculaire qui coupe en H le prolongement du diamètre; je trace HI, HF, enfin je mène les rayons OD, OE parallèles à HI, HF; la corde qui joint les extrémités de ces rayons répond à la question, comme il est très-aisé de le vérifier.

Question d'examen;

PAR MM. GAY ET DAIGUEPLATS,
Élèves du lycée d'Angoulême (classe de M. Dupain).

Construire un carré ABCD dont les côtés prolongés

FIG. 1.



(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

coupent une droite donnée en quatre points donnés E, F, G, H (E sur BA, F sur CD, G sur AD, H sur BC).

Soit x le côté du carré,

$$FD = y,\quad DG = z,\quad EF = a,\quad FG = b,\quad GH = c;$$

le triangle EAG, coupé par FD, donne

$$(1)\qquad \frac{x}{x+z} = \frac{a}{a+b} \quad \text{ou} \quad bx = az;$$

le triangle FCH, coupé par DG, donne

$$(2)\qquad \frac{x}{x+y} = \frac{c}{b+c} \quad \text{ou} \quad bx = cy;$$

enfin, dans le triangle rectangle FDG, on a :

$$(3)\qquad y^2 + z^2 = b^2.$$

De ces trois équations on tire

$$x = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad y = \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad z = \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

valeurs aisées à construire.

Autrement. — La diagonale BD coupe la droite donnée en un point R, et la perpendiculaire menée à cette diagonale par le point D coupe la droite donnée en S; les lignes DR, DS sont des bissectrices du triangle FDG, l'une intérieure, l'autre extérieure : on a donc

$$\frac{FR}{GR} = \frac{FS}{GS} = \frac{FD}{GD}.$$

Or, des équations (1) et (2) on tire

$$\frac{FD}{GD} = \frac{a}{c};$$

d'ailleurs,

$$FR + GR = b,\quad FS - GS = b,$$

donc

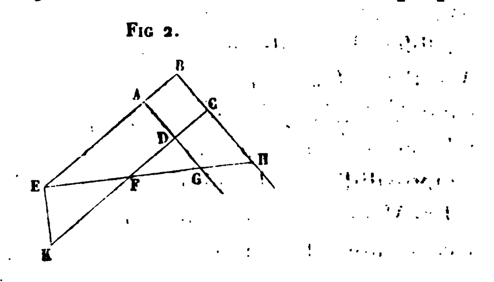
$$FR = \frac{ab}{a+c}, \quad FS = \frac{ab}{a-c}.$$

Les points R et S s'obtiennent donc par des quatrièmes proportionnelles, et le point D appartient à six lieux géométriques dont deux suffisent pour le construire, les quatre autres servant de vérification. Ces lieux sont : 1° et 2° les circonférences ayant pour diamètres FG, RS; 3°, 4° et 5° les segments capables de l'angle de 45 degrés construits sur FR, RG, GS; 6° le segment capable de 135 degrés construit sur FS.

Note de M. Dupain. — Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les deux constructions suivantes :

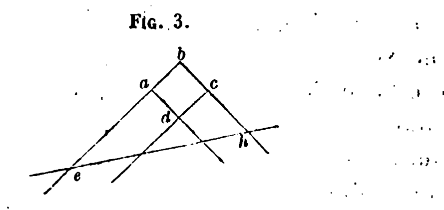
1° Au point E j'élève sur la droite donnée la perpen-

Fig 2.



diculaire EK égale à GH; je trace la ligne indéfinie KF à laquelle je mène une parallèle par le point E et des perpendiculaires par les points G et H.

Fig. 3.



2° Je construis un carré *abcd*; je prends sur le pro-

longement de bc un point h tel que $\frac{bh}{ch} = \frac{\text{EH}}{\text{FH}}$, et sur le prolongement de ba un point e tel que $\frac{be}{ae} = \frac{\text{EH}}{\text{EG}}$. Je joins eh et j'obtiens une figure semblable à la proposée qu'il ne s'agit plus que d'amplifier ou de réduire dans le rapport de EH à eh.

PRIX PROPOSÉ PAR L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES NUOVI LINCEI.

« Exposer une méthode au moyen de laquelle on puisse déterminer *toutes* les valeurs rationnelles de x capables de rendre carré ou cube parfait le polynôme $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, A, B, C,..., E étant des nombres entiers, toutes les fois qu'il existera de pareilles valeurs, et qui, dans le cas contraire, fasse connaître l'impossibilité de la solution. »

Les Mémoires, écrits en italien, en latin ou en français, avec le nom de l'auteur sous pli cacheté, doivent être envoyés à l'Académie avant la fin d'octobre 1866. Le prix consistera dans une médaille d'or de la valeur de 100 écus romains. Le Mémoire couronné sera publié entièrement ou par extrait dans les *Atti* de l'Académie, et cinquante exemplaires seront envoyés à l'auteur.

Une Note accompagnant le programme de l'Académie expose l'état de la question, traitée par Fermat, Euler, Legendre, Lagrange, Jacobi ; mais toutes les méthodes connues sont imparfaites : 1° parce qu'elles supposent déjà une solution connue ; 2° parce qu'il n'est pas prouvé qu'elles fournissent toutes les solutions possibles. Il se-

rait donc à désirer qu'on en trouvât une autre qui n'eût besoin de la connaissance d'aucune solution, fît connaître si le problème est possible ou non, et en donnât toutes les solutions.

Ouvrages à consulter : FERMAT, *Doctrinæ analyticæ inventum novum*, analysé par JACQUES DE BILLY dans le *Diophante*, imprimé à Toulouse en 1670. — EULER, *Éléments d'Algèbre* (chap. VIII, IX et X du tome II). — EULER, plusieurs Mémoires posthumes dans le tome XI des *Mémoires de Saint-Pétersbourg* (1830). — JACOBI, *De usu theoriæ integralium ellipticarum et integralium Abelianarum in analysi Diophantea* (Crelle, t. XIII, 1835). — LEGENDRE, *Théorie des nombres* (3e édit., t. II, p. 123-125). — LAGRANGE, *Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante* (*Acad. de Berlin*, 1778).

CORRESPONDANCE.

1. On nous fait observer que les questions énoncées sous les nos 737, 738 (p. 428) sont l'objet d'un théorème inséré dans les *Nouvelles Annales* (t. XVII, p. 240, année 1858), et qui est dû à M. Lemoine.

Nous nous empressons de faire droit à cette réclamation.

2. Le théorème du no 742 (p. 429), dont la démonstration est proposée par M. Griffiths, nous a aussi été adressé, avec sa démonstration, par M. Painvin dans une Note sur *quelques formules relatives aux coniques conjuguées à un triangle.*

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE, AVEC APPLICATIONS AUX SECTIONS CONIQUES

(voir p. 393);

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie, Sous-Directeur de la fonderie de Toulouse.

DEUXIÈME PARTIE. — APPLICATIONS.

§ I. — *Remarques préliminaires.*

Dans la première partie de ce Mémoire, j'ai rattaché à une vue d'ensemble sur les tendances actuelles de la Géométrie quelques méthodes nouvelles d'investigation dont j'ai posé les bases. Dans cette seconde partie, j'essayerai de donner une idée des ressources qu'on peut tirer de ces méthodes, ou de méthodes de ce genre, évidemment applicables à beaucoup d'autres questions que celles que j'ai traitées dans un travail qui n'est, comme l'indique son titre, qu'une étude, et une étude même très-restreinte, sur un sujet offrant aux spéculations géométriques un champ illimité.

J'exposerai d'abord les principes d'une théorie générale, due à l'inversion trilinéaire, et qui, la figure de référence étant un triangle au lieu d'être une conique, vient remplacer la théorie des lignes polaires réciproques qui disparaît. Cette théorie est celle des lignes réciproques par polarité inverse; elle fait l'objet du deuxième paragraphe.

Le reste du Mémoire est consacré à des applications aux sections coniques. Le choix du triangle de référence ayant, comme je l'ai montré, une influence radicale sur la nature de la conjuguée d'une ligne donnée, ce choix

est fait de manière à obtenir les conjuguées les plus simples; et on peut prévoir dès lors que le triangle de référence est pris inscrit ou circonscrit à la conique considérée. Les formules citées à la fin de la première partie de ce Mémoire indiquent les conjuguées qu'on doit obtenir dans les deux cas.

Une conique circonscrite au triangle de référence, étant regardée comme la directrice d'un point, doit avoir, d'après les formules générales, ces trois conjuguées: 1° une droite, lieu de l'inverse du point; 2° un point fixe, par lequel passe la polaire du point; 3° une conique, enveloppe de la droite qui a le point de la conique donnée pour pôle inverse. Quant aux trois conjuguées qu'on ferait naître en regardant la conique comme l'enveloppe de sa tangente, elles seraient une courbe du deuxième degré et deux du quatrième.

Une conique inscrite au triangle de référence, étant regardée comme l'enveloppe de sa tangente, doit avoir, d'après les formules, ces trois conjuguées: 1° une droite lieu du pôle de la tangente; 2° un point fixe, par lequel passe la droite de pôles inverses de la tangente; 3° une conique, lieu du pôle inverse de la tangente. Quant aux trois conjuguées qu'on ferait naître en regardant la conique comme la directrice d'un point, elles seraient une courbe du deuxième degré et deux du quatrième.

En résumé, et pour se borner au plus simple, on remarquera : 1° qu'une conique circonscrite ou inscrite au triangle de référence doit avoir *une droite conjuguée* et *un point conjugué,* cette droite et ce point n'ayant, bien entendu, ni la même signification ni la même construction dans les deux cas; 2° que la connaissance de la droite conjuguée ou du point conjugué doit suffire, avec celle du triangle de référence, pour déterminer et permettre de construire la conique circonscrite ou inscrite.

Ces importantes propriétés des modes de conjugaison mis en jeu dans ce Mémoire seront en effet directement établies par la suite et étudiées avec quelques développements.

§ II. — *Lignes réciproquement conjuguées par polarité inverse.*

1. *Lorsqu'une droite tourne autour d'un point fixe, le pôle inverse de cette droite décrit la droite qui a pour pôle inverse le point fixe; réciproquement, lorsqu'un point décrit une droite fixe, la droite qui a ce point pour pôle inverse passe par le pôle inverse de la droite fixe.*

Soient (t', u', v') le point fixe, $Tt + Uu + Vv = 0$ une droite ayant le point (T, U, V) pour pôle inverse; si cette droite passe par le point (t', u', v'), on aura

$$Tt' + Uu' + Vv' = 0;$$

donc le point (T, U, V) décrit la droite qui a le point (t', u', v') pour pôle inverse. Réciproquement, soit (T, U, V) un point d'une droite ayant le point (t', u', v') pour pôle inverse, on aura

$$Tt' + Uu' + Vv' = 0;$$

mais l'équation d'une droite qui a le point (T, U, V) pour pôle inverse étant

$$Tt + Uu + Vv = 0,$$

on voit que cette droite passe par le point (t', u', v').

2. On peut, au moyen du théorème précédent, établir la théorie des lignes réciproques par polarité inverse, absolument comme on établit celle des lignes polaires réciproques, quand la figure de référence est une conique.

Par conséquent :

Lorsqu'une ligne est la directrice du pôle inverse de la tangente d'une autre ligne, réciproquement la seconde ligne est la directrice du pôle inverse de la tangente de la première.

Le nombre de tangentes que l'on peut mener par un point à l'une des lignes est égal au nombre de points suivant lesquels la droite qui a ce point pour pôle inverse rencontre l'autre ligne.

L'ordre de multiplicité d'un point sur l'une des lignes est égal à l'ordre de multiplicité du contact avec l'autre ligne de la droite qui a ce point pour pôle inverse (l'ordre de multiplicité d'un point étant o lorsque le point n'est pas sur la ligne; l'ordre de multiplicité du contact d'une droite étant o lorsque la droite n'est pas tangente).

Toutes les autres propriétés des lignes polaires réciproques se retrouveraient de même dans les lignes réciproques par polarité trilinéaire inverse; il n'y a de changé que le mode de conjugaison du point et de la droite, qui sert de base à la conjugaison des deux lignes.

Cette théorie rend évidente l'exactitude des formules citées au § VII (1re partie), pour le cas des lignes conjuguées par polarité inverse.

3. Le triangle de référence restant le même, une ligne donnée peut avoir, suivant les modes de conjugaison examinés, six conjuguées : trois en considérant la ligne comme la directrice d'un point, trois en la considérant comme l'enveloppe de sa tangente.

Il résulte de la théorie des lignes réciproques par polarité inverse, que deux de ces six conjuguées d'une ligne donnée se confondent : l'enveloppe de la droite dont le pôle inverse se meut sur la ligne donnée et le lieu du pôle

inverse de la tangente de la ligne donnée sont une seule et même ligne, conjuguée réciproque de la première par polarité inverse.

Si maintenant on considère le système formé par une ligne donnée et sa conjuguée réciproque, chacune des deux lignes aura encore quatre conjuguées, mais qui ne feront pas huit lignes différentes, car les deux réciproques auront une même ligne pour conjuguée, suivant deux modes différents. Ainsi, le lieu de l'inverse du point de l'une sera le lieu du pôle de la tangente à l'autre, et réciproquement; l'enveloppe de la polaire du point de l'une sera l'enveloppe de la droite de pôles inverses (*) de la tangente à l'autre, et réciproquement.

On peut encore remarquer que les quatre conjuguées de deux lignes réciproques se partagent en deux systèmes de lignes réciproquement conjuguées aussi par polarité inverse, car le lieu de l'inverse du point d'une ligne et l'enveloppe de la polaire du point de cette même ligne sont évidemment dans ces conditions.

En résumé, une ligne donnée détermine avec ses cinq conjuguées un tableau de six lignes se partageant en trois couples de lignes réciproques, et le tableau resterait le même si, au lieu de partir de cette ligne, on partait de sa conjuguée réciproque par polarité inverse.

4. Pour donner un exemple du tableau dont il vient d'être question, j'anticiperai un peu sur le sujet en considérant le cas particulier d'une conique circonscrite au triangle de référence, qui aura, d'après la théorie établie, une conique inscrite pour ligne réciproque.

Ce système de deux coniques réciproques, l'une cir-

(*) La *droite de pôles inverses* d'une droite est la conjuguée de cette seconde droite par inversion polaire (*voir* p. 400).

conscrite, l'autre inscrite, a les quatre conjuguées suivantes : 1° une droite et un point réciproquement conjugués par polarité inverse, car le point est le pôle inverse de la droite; 2° deux courbes du quatrième degré, l'une doublement inscrite, l'autre doublement circonscrite, toutes deux conjuguées aussi par polarité inverse. La droite conjuguée est à la fois le lieu de l'inverse du point de la conique circonscrite et le lieu du pôle de la tangente de l'inscrite. Le point conjugué, pôle inverse de la droite conjuguée, est à la fois l'enveloppe de la polaire du point de la conique circonscrite et de la droite de pôles inverses de la tangente à l'inscrite.

Comme exemple plus particulier encore, considérons le cas du cercle circonscrit : la réciproque par polarité inverse est l'ellipse inscrite par les milieux des côtés, la droite conjuguée est à l'infini, le point conjugué est l'inverse du centre de gravité du triangle de référence.

§ III. — *Droite conjuguée et point conjugué d'une conique circonscrite.*

1. *Lorsqu'un point décrit une conique circonscrite au triangle de référence, l'inverse de ce point décrit une droite nommée droite conjuguée de la conique.*

La polaire du point de la conique passe par un point fixe qui est le pôle inverse de la droite conjuguée et qui est nommé point conjugué de la conique.

La droite conjuguée est la droite de pôles inverses de celle qui passe par les points d'intersection de chaque côté du triangle et de la tangente à la conique menée par le sommet opposé.

Le point conjugué est le point de concours des droites qui joignent chaque sommet du triangle au point d'inter-

section des tangentes à la conique menées par les deux autres sommets.

La démonstration de ces propriétés est bien simple. D'abord la conique

$$\frac{\alpha}{T}+\frac{\beta}{U}+\frac{\gamma}{V}=0$$

et la droite

$$\alpha t+\beta u+\gamma v=0$$

sont deux lignes inverses, car les équations se changent l'une dans l'autre par la relation des points inverses

$$Tt=Uu=Vv.$$

Soit maintenant (t', u', v') le pôle inverse de la droite

$$\alpha t+\beta u+\gamma v=0,$$

l'équation de cette droite pourra s'écrire

$$tt'+uu'+vv'=0,$$

et celle de la conique

$$\frac{t'}{T}+\frac{u'}{U}+\frac{v'}{V}=0;$$

la polaire d'un point de la conique sera

$$\frac{t}{T}+\frac{u}{U}+\frac{v}{V}=0,$$

donc, en vertu de l'équation précédente, elle passera par le point (t', u', v'). Quant aux propriétés de la droite conjuguée et du point conjugué, relativement aux tangentes, elles deviennent évidentes sur les équations des tangentes aux trois sommets, et sur les équations des

droites qui joignent chaque sommet au point d'intersection des tangentes menées par les deux autres.

Tangentes aux trois sommets.	Droites issues des trois sommets.
$\alpha V + \gamma T = 0,$	$\alpha V - \gamma T = 0,$
$\beta V + \gamma U = 0,$	$\beta V - \gamma U = 0,$
$\alpha U + \beta T = 0,$	$\alpha U - \beta T = 0.$

2. Lorsque la conique est le cercle circonscrit, son équation devient

$$\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{u} + \frac{\gamma}{v} = 0,$$

et sa droite conjuguée est à l'infini, car l'équation

$$at + bu + cv = 0$$

est incompatible, pour des valeurs finies des coordonnées, avec l'équation de condition

$$at + bu + cv = 2S \quad (1^{\text{re}}\text{ partie, § I}).$$

Le point conjugué du cercle circonscrit est dès lors l'inverse du centre de gravité du triangle.

La droite à l'infini, dont la considération est aujourd'hui systématiquement introduite dans certaines théories de Géométrie supérieure, notamment dans la théorie générale des foyers, est, comme on a pu le voir, tout à la fois : la polaire du centre de gravité, le lieu des pôles inverses des droites qui tournent autour de l'inverse du centre de gravité, l'inverse ou droite conjuguée du cercle circonscrit, et le lieu du pôle de la tangente, ou droite conjuguée, de l'ellipse inscrite par les milieux des côtés.

Les inverses des points à l'infini d'une ligne sont évidemment les points d'intersection de l'inverse de cette ligne avec le cercle circonscrit au triangle de référence. Par conséquent, les inverses des points à l'infini d'une

conique se trouvent aux points d'intersection de la droite conjuguée avec le cercle circonscrit. Les polaires des points à l'infini d'une conique sont les tangentes menées par le point conjugué de cette conique à l'ellipse réciproque du cercle circonscrit.

3. Cinq points d'une conique étant donnés, on peut se servir, soit de la droite conjuguée, soit du point conjugué, pour décrire la courbe.

Je prends trois des cinq points pour sommets du triangle de référence, et j'inverse les deux autres; la droite qui joint ces deux inverses est la droite conjuguée qui me permet de trouver autant de points que je veux de la conique.

Autrement : je prends trois des cinq points pour sommets du triangle de référence, et je construis les polaires des deux autres ; le point d'intersection de ces polaires est le point conjugué qui me permet de trouver autant de points que je veux de la conique.

Le point conjugué peut être employé pour décrire la conique lorsqu'elle se rapproche beaucoup du cercle, parce qu'alors la droite conjuguée s'éloigne beaucoup.

La considération des points à l'infini de la conique déterminée par cinq points fournit immédiatement sur la nature de la courbe des notions caractéristiques et remarquables.

La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que la droite conjuguée ne coupe pas la circonférence circonscrite, lui est tangente ou la coupe.

La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que le point conjugué est intérieur à l'ellipse inscrite par les milieux des côtés du triangle, situé sur cette ellipse ou extérieur.

Dans le cas de l'hyperbole on remarquera :

1° *Que les droites qui joignent un sommet quelconque du triangle aux points d'intersection de la droite conjuguée avec la circonférence circonscrite font entre elles les mêmes angles que les asymptotes;*

2° *Que les inverses de ces droites sont parallèles aux asymptotes.*

D'où résultent pour l'hyperbole équilatère ces théorèmes :

La droite conjuguée d'une hyperbole équilatère circonscrite passe toujours par le centre du cercle circonscrit.

Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle se coupent au point de concours des trois hauteurs de ce triangle.

Le point conjugué d'une hyperbole équilatère circonscrite est sur la droite qui a pour pôle inverse le centre du cercle circonscrit, c'est-à-dire sur la polaire du point de concours des hauteurs.

4. On peut de ce qui précède tirer des moyens pour résoudre beaucoup de problèmes sur la conique déterminée par cinq points, sans décrire la courbe, et pour trouver tous les éléments de la courbe.

Les axes d'une conique étant parallèles aux bissectrices de l'un quelconque des systèmes de droites qui passent par quatre points de la conique situés sur un même cercle, on trouvera la direction des axes en cherchant le quatrième point d'intersection du cercle circonscrit avec la conique. Or ce point est l'inverse des points à l'infini de la droite conjuguée; on l'obtiendra donc en cherchant l'intersection du cercle avec l'inverse de la parallèle à la droite conjuguée, menée par l'un quelconque des sommets du triangle.

On a déjà vu comment on obtenait les directions des asymptotes dans le cas de l'hyperbole.

La seconde extrémité d'une corde qui part d'un sommet du triangle est l'inverse du point d'intersection de l'inverse de cette corde avec la droite conjuguée. On sait dès lors construire le diamètre d'un système quelconque de cordes et le centre de la conique.

La corde sous laquelle la conique coupe une droite quelconque s'obtient de la manière suivante : on cherche le milieu de cette corde au moyen du diamètre conjugué à cette direction ; par un sommet du triangle on mène une corde auxiliaire, tracée sous la condition de faire avec la droite donnée des angles ayant les bissectrices parallèles aux axes de la conique, et on cherche la seconde extrémité de cette corde ; le cercle qui passe par les deux extrémités de la corde auxiliaire, et qui a son centre sur la perpendiculaire élevée par le milieu de la corde cherchée, coupe la droite donnée sous la corde cherchée, qui peut être d'ailleurs réelle ou imaginaire.

Les tangentes à la conique aux trois sommets du triangle peuvent s'obtenir de suite par les propriétés de la droite conjuguée ou du point conjugué ; on a aussi des moyens, soit pour construire la tangente en un point quelconque, soit même pour mener des tangentes par un point extérieur : je ne m'y arrêterai pas. Enfin la construction du cercle osculateur en un point quelconque n'offre pas plus de difficulté. Le cercle osculateur coupe en effet la conique suivant une corde qui fait avec la tangente des angles dont les bissectrices sont parallèles aux axes. La seconde extrémité de cette corde étant obtenue, le cercle osculateur n'est plus qu'un cercle tangent à une droite en un point donné, et passant par un autre point.

5. Je terminerai ce paragraphe en citant quelques-uns

des résultats les plus remarquables auxquels conduit le calcul, lorsqu'on étudie, par l'analyse, la droite conjuguée, relativement à un triangle inscrit, d'une conique rapportée à son centre et à ses axes.

Soient :

$$My^2 + Nx^2 - 1 = 0,$$

l'équation de la conique ;

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha + p = 0,$$
$$y\cos\alpha' - x\sin\alpha' + p' = 0,$$
$$y\cos\alpha'' - x\sin\alpha'' + p'' = 0,$$

les équations des côtés du triangle de référence ; (p, q) le centre du cercle circonscrit au triangle ; R le rayon du cercle.

L'équation de la ligne conjuguée ou inverse de la conique est celle-ci :

$$(y - q)\cos(\alpha + \alpha' + \alpha'') - (x - p)\sin(\alpha + \alpha' + \alpha'') + R\frac{M + N}{M - N} = 0.$$

Soient maintenant : Δ, la distance du centre du cercle circonscrit à la droite conjuguée ; δ_1, δ_2, δ_3 les distances des trois sommets du triangle à la droite conjuguée.

On trouvera les relations suivantes, dont l'importance n'échappera pas :

$$(1) \qquad \frac{M}{N} = \frac{\frac{\Delta}{R} + 1}{\frac{\Delta}{R} - 1},$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{M} &= \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R} + 1\right)\left(\frac{\Delta}{R} - 1\right)^2, \\ \frac{1}{N} &= \frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R} + 1\right)^2\left(\frac{\Delta}{R} - 1\right). \end{aligned} \right.$$

Parmi beaucoup d'autres, on peut faire sur ces formules les remarques suivantes :

La formule (1) redonne les caractères déjà connus :

$\Delta > R \ldots$ Ellipse,
$\Delta = \infty \ldots$ Cercle,
$\Delta = R \ldots$ Parabole,
$\Delta < R \ldots$ Hyperbole.
$\Delta = 0 \ldots$ Hyperbole équilatère.

Les formules (2) peuvent être très-utilement employées à la détermination des longueurs des axes d'une conique passant par cinq points, ou de la longueur de l'axe d'une hyperbole équilatère passant par quatre points, ou des paramètres d'une parabole passant par quatre points, comme on le verra au § V. La simplicité des constructions préalables est en effet de nature à laisser à un calcul, d'ailleurs très-simple lui-même, tous ses avantages de précision sur les solutions purement géométriques, toujours assez longues, de ces problèmes.

(*La suite prochainement.*)

DE L'INVOLUTION PLANE RELATIVEMENT A LA SPHÈRE;

PAR M. POUDRA.

Soit O le centre d'une sphère et R son rayon; soit I un plan quelconque et D la distance du centre O de la sphère à ce plan I.

Dans ce plan I prenons un point quelconque m et regardons-le comme le sommet d'un cône tangent à la sphère; le plan de contact est ce qu'on appelle le plan polaire du point m relativement à la sphère. Ce plan polaire cou-

pera le plan I suivant une droite indéfinie *np*. Si on prend de même le plan polaire d'un point quelconque *n* de cette droite, ce plan polaire coupera le plan I suivant une droite *mp* passant par le premier point *m*, et la droite *np* en un point *p*, qui sera tel, que si on prend son plan polaire, il passera par les points *m* et *n*. Ces trois plans polaires se couperont en un point P, dont le plan polaire sera le plan I; il résulte de ces constructions un tétraèdre P*mnp* qui est tel, que le plan polaire de l'un quelconque des sommets est le plan qui passe par les trois autres, et réciproquement le pôle d'une des faces est le sommet opposé; ce tétraèdre est par suite appelé tétraèdre polaire de la sphère.

On voit pareillement que par rapport à cette sphère et ce plan I il existe une infinité de tétraèdres polaires qui ont tous un sommet commun en P et une base telle que *mnp*, située dans ce plan I.

Dans le tétraèdre polaire P*mnp* considérons chaque sommet *m*, *n*, *p* de la base comme le centre d'une sphère orthogonale à la sphère donnée; c'est-à-dire ayant pour rayon la tangente menée de ce point à la sphère; elle passera par conséquent par l'intersection de la sphère donnée avec le plan polaire de ce point.

Les trois sphères ainsi déterminées, étant orthogonales à la sphère donnée, le sont aussi entre elles; elles se coupent suivant une droite QQ_1 passant par le centre O de la sphère primitive, par le pôle P du plan I, et perpendiculaire à ce plan; elles la rencontrent en un point C milieu du segment QQ_1.

Ces trois sphères étant orthogonales entre elles, il en résulte que les droites Qm, Qn, Qp ou Q_1m, Q_1n, Q_1p qui joignent le point Q ou le point Q_1 aux points *m*, *n*, *p* de la base, forment entre elles un angle solide trirectangle. Or, pour tous les tétraèdres polaires ci-dessus, le point Q

ou le point Q_1 sera de même le sommet d'un angle solide trirectangle ; donc la série des groupes de trois points sur le plan I, base d'un tétraèdre polaire, forme une involution plane, dont C est le point central, la distance $CQ = CQ_1$ la puissance polaire, et Q le sommet.

Connaissant un de ces groupes *mnp* de trois points, on pourra donc déterminer une infinité d'autres groupes, sans avoir recours à la sphère ; et chacun de ces groupes formera la base d'un tétraèdre polaire ayant un sommet en P.

On a évidemment

$$\overline{CQ}^2 = D^2 - R^2 = (D + R)(D - R), \quad CP = \frac{D^2 - R^2}{D};$$

$$OP = \frac{R^2}{D}, \quad D = \frac{\overline{CQ}^2}{CP}.$$

Ainsi on voit qu'étant donnée dans un plan une involution plane, on connaîtra la perpendiculaire CQ, et que par suite on pourra prendre D ou R (mais seulement l'un ou l'autre), de sorte qu'il y aura une infinité de sphères correspondantes à une même involution, mais le sommet P des tétraèdres polaires, ou pôle du plan I, variera de position sur l'axe QC. Si on donne CP, on déterminera CQ, puis D et R, etc., c'est-à-dire qu'à un tétraèdre polaire ne correspondra qu'une sphère déterminée de grandeur et de position, et tous les tétraèdres qui auront chacun pour base un des triangles de l'involution déterminée par un angle solide trirectangle de sommet Q seront des tétraèdres polaires de la même sphère.

PROPRIÉTÉS DU TÉTRAÈDRE POLAIRE;

Par M. POUDRA.

Les propriétés des tétraèdres polaires sont intimement liées avec celles de l'involution; il est nécessaire de rappeler ici les principales de ces propriétés.

Soit P*mnp* un tétraèdre polaire de la sphère dont le centre est le point O et R le rayon; P, dans ce tétraèdre, est le sommet fixe des tétraèdres polaires, *mnp* en est la base qui peut varier dans son plan. Voici les propriétés de ce tétraèdre :

1° Toute droite menée par un des quatre sommets du tétraèdre est divisée harmoniquement par la sphère et le plan polaire de ce sommet.

2° Chaque plan formant les faces du tétraèdre coupe la sphère suivant une circonférence qui est la base d'un cône tangent à la sphère suivant cette circonférence, et qui a pour sommet le pôle de ce plan.

On voit que le plan *mnp* de la base, étant ici extérieur à la sphère, doit être regardé comme coupant la sphère suivant un cercle imaginaire, qui serait la base d'un cône imaginaire dont P serait le sommet.

3° Les deux plans tangents à la sphère, menés par une des arêtes du tétraèdre, ont pour corde de contact la partie de l'arête opposée comprise dans la sphère.

4° Ces deux plans tangents et les deux faces du tétraèdre qui passe par cette même arête forment un rapport harmonique.

5° Si par cette même arête, telle que *mn*, on mène deux plans formant avec les deux faces du tétraèdre un

rapport harmonique, ces deux plans couperont la sphère suivant deux circonférences qui seront sur le même cône, ayant pour sommet le point p opposé à mn.

6° Dans une de ces circonférences, on peut inscrire une infinité de quadrilatères ayant les points m et n pour points de concours des côtés opposés. Les sommets de ces quadrilatères étant joints avec le point p formeront une série de pyramides quadrangulaires inscrites dans le cône, donnant dans l'autre circonférence une autre série de quadrilatères inscrits ayant de même les points m, n pour points de concours des côtés opposés, de sorte que les points m et n seront aussi les sommets de pyramides quadrangulaires : il en résulte évidemment qu'il y aura ainsi une série d'hexaèdres inscrits dans la sphère, formés par trois pyramides hexaèdres; de plus il est évident que les diagonales de tous ces hexaèdres passeront par le quatrième sommet P du tétraèdre.

Ces hexaèdres inscrits seront pour la sphère ce que sont les quadrilatères inscrits dans la circonférence.

7° Si on regarde un des sommets, tel que m, du tétraèdre polaire comme le sommet d'un cône quelconque du second degré, il coupera la sphère suivant une courbe du quatrième : or, si on la regarde comme la base de trois autres cônes ayant pour sommet respectif chacun des trois autres sommets du tétraèdre, ces quatre cônes seront tous du second degré; car on voit que deux de ces cônes, coupés par un plan passant par les deux sommets, donneront dans chaque deux droites formant un quadrilatère inscrit dans la sphère.

On sait que par l'intersection de deux surfaces du second degré on peut faire passer une infinité de surfaces du second degré : comme l'une de ces surfaces peut se transformer en une sphère, on peut en conclure que par l'intersection commune passent toujours quatre cônes

ayant pour sommets ceux d'un tétraèdre polaire relativement à cette sphère.

THÉORÈMES SUR LES DIAMÈTRES DANS LES CONIQUES;

PAR M. PAINVIN.

Si

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$
$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = 1$$

sont les équations d'une conique à centre successivement rapportée aux systèmes d'axes xoy, $x'oy'$ dont les angles sont respectivement θ et θ', on a les relations

$$\text{(I)} \qquad \frac{B^2 - AC}{\sin^2\theta} = \frac{B'^2 - A'C'}{\sin^2\theta'},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A' + C' - 2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}.$$

Ces relations expriment, la première que le produit des axes est constant, et la seconde (après avoir divisé ses deux membres par les racines carrées de ceux de la première) que l'angle des directions asymptotiques est invariable. Mais elles peuvent, en outre, se prêter à de nombreuses interprétations géométriques concernant un système de deux diamètres quelconques; je citerai les deux suivantes.

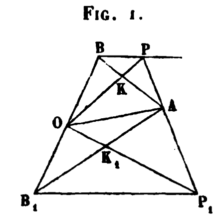
« THÉORÈME I. — Soient deux diamètres réels quel-
» conques OA et OB; menons les tangentes aux extré-
» mités B et B_1 du diamètre OB, lesquelles rencontrent
» en P et P_1 la tangente en A; soient K et K_1 les inter-

» sections des diamètres OP et OP_1 avec les cordes AB
» et AB_1 : on a

$$(1) \qquad \text{surf AOB}.\sqrt{\frac{OP.OP_1}{OK.OK_1}} = \text{constante} = ab,$$

» a et b étant les longueurs des demi-axes de la courbe.
» Si l'un des diamètres est imaginaire, OB par exem-

Fig. 1.



» ple, on mènera en B la tangente à l'hyperbole conju-
» guée, et on aura

$$(1\ bis) \qquad \text{surf AOB}.\sqrt[2]{\frac{OP}{OK}} = \text{constante} = ab,$$

» a et b étant les demi-axes de la courbe. »

« Théorème II. — Soient deux diamètres quelconques
» OA et OB, l'un d'eux au moins étant réel, OA par
» exemple. Menons la tangente en A et joignons le point O
» au milieu I de la corde AB ; soient Q le point de ren-
» contre de OI avec la tangente en A, et AA', BB' les
» distances respectives des extrémités A et B aux dia-
» mètres OB et OA ; on a

$$(2) \quad \frac{1}{\overline{AA'}^2} \pm \frac{1}{\overline{BB'}^2} - \frac{OI - IQ}{OQ} \cdot \frac{\cot\theta}{\text{surf AOB}} = \text{const} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2};$$

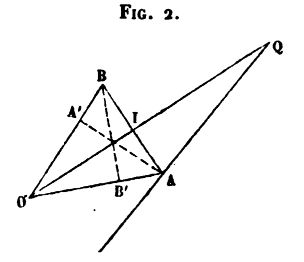
» θ est l'angle des deux diamètres considérés, a et b sont
» les axes de la courbe. Le signe — devant les seconds
» termes de chaque membre correspond au cas où le dia-

32.

» mètre OB est imaginaire. La distance OQ étant con-
» sidérée comme positive, on devra regarder les seg-
» ments OI, IQ, (OI — IQ) comme positifs ou négatifs,
» suivant qu'ils seront dans le sens OQ ou en sens con-
» traire.

» Lorsque les deux diamètres OA et OB sont réels, la

Fig. 2.



» droite QB est tangente à la courbe au point B. Si les
» deux diamètres OA et OB sont imaginaires, on mène
» les tangentes à l'hyperbole conjuguée. »

Les deux théorèmes, traduits par les égalités (1), (1 *bis*) et (2), sont des interprétations géométriques des relations (I) et (II); ils donnent, comme cas particuliers, les propositions connues sur les diamètres conjugués et sur les diamètres rectangulaires.

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS;

Par M. MIRZA-NIZAM.

M. Michael Roberts a énoncé dans les *Nouvelles Annales* (*voir* cahier de mars 1864, p. 139, question 694) un théorème sur un déterminant numérique, théorème qui a été démontré dans le cahier de septembre de la même année, p. 395 et 397, de deux façons différentes, par M. Smet-Jamar (du lycée Louis-le-Grand) et

MM. Cornu et Picquet (de l'institution Sainte-Barbe). Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

une fonction entière de degré n en x. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro cette fonction, et par $f'(x)$ la dérivée de cette fonction par rapport à x; on aura

$$R = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x \ldots & x \\ x & \alpha_2 & x \ldots & x \\ x & x & \alpha_3 \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & x \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = f(x) - xf'(x).$$

Solution. — R s'écrit en effet

$$R = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -x & -x \ldots & -x \\ -x & -\alpha_2 & -x \ldots & -x \\ -x & -x & -\alpha_3 \ldots & -x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -x & -x & -x \ldots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Retranchons la dernière colonne de toutes les autres; on obtient

$$R = \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & 0 & 0 \ldots & -x \\ 0 & x-\alpha_2 & 0 \ldots & -x \\ 0 & 0 & x-\alpha_3 \ldots & -x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -(x-\alpha_n) & -(x-\alpha_n) & -(x-\alpha_n) \ldots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Divisons la première colonne par $x - \alpha_1$, la deuxième par $x - \alpha_2, \ldots$, la $(n-1)^{\text{ième}}$ par $(x - \alpha_{n-1})$, la dernière par x, et divisons aussi la dernière ligne horizontale par

» mètre OB est imaginaire. La distance O
» sidérée comme positive, on devra reg
» ments OI, IQ, (OI — IQ) comme pos
» suivant qu'ils seront dans le sens OC
» traire.

» Lorsque les deux diamètres O

FIG. 2.

B A' I O'

degré n en x. Désignons par
ines de l'équation que l'on
ette fonction, et par f
rapport à x; on aura

» droite QB est tang
» deux diamètres C
» les tangentes à l'

Les deux thé
(1 *bis*) et (2),
relations (I)
liers, les pr
gués et sur

de la di

$$- \sum_i \frac{1}{x - \alpha_i} \Big),$$

valeurs de 1 à n. Or on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_i \frac{1}{x - \alpha_i};$$

$$R = f(x) - xf'(x).$$

C. Q. F.

Cas particuliers. — On obtient le théorème d
ael Roberts en faisant $x = 1$ et remarquant
quantités qui ont été désignées ici par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$
été désignées par M. Michael Roberts par $-\alpha$

$(x - \alpha_n)$, on obtient

$$R = xf(x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\ldots & & -1 \\ 0 & 1 & 0\ldots & & -1 \\ 0 & 0 & 1\ldots & & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{-1}{x-\alpha_1} & \frac{-1}{x-\alpha_2} & \frac{-1}{x-\alpha_3}\cdots & \frac{1}{x} - & \frac{1}{x-\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Ajoutant successivement chacune des colonnes à la dernière, on obtient

$$R = xf(x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{-1}{x-\alpha_1} & \frac{-1}{x-\alpha_2} & \frac{-1}{x-\alpha_3}\cdots & \frac{1}{x} - \sum_i \frac{1}{x-\alpha_i} \end{vmatrix}.$$

qui se réduit au produit des éléments de la diagonale

$$R = xf(x)\left(\frac{1}{x} - \sum_i \frac{1}{x-\alpha_i}\right),$$

i recevant toutes les valeurs de 1 à n. Or on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_i \frac{1}{x-\alpha_i};$$

donc

$$R = f(x) - xf'(x).$$

C. Q. F. D.

Cas particuliers. — On obtient le théorème de M. Michael Roberts en faisant $x = 1$ et remarquant que les quantités qui ont été désignées ici par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ont été désignées par M. Michael Roberts par $-\alpha_1$, $-\alpha_2$,

$-\alpha_3, \ldots, -\alpha_n$. On obtient une autre égalité en faisant $x = -1$.

Remplaçons x par l'une des racines simples α_i, on obtient

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_i & \alpha_i \ldots & \alpha_i \\ \alpha_i & \alpha_2 & \alpha_i \ldots & \alpha_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_i & x_i & \alpha_i \ldots & x_n \end{vmatrix} = -\alpha_i f'(\alpha_i),$$

ou, en remarquant que tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne horizontale sont égaux à α_i, on a

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_i \ldots & & & \alpha_i \\ \alpha_i & \alpha_2 \ldots & & & \alpha_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_i & \alpha_i \ldots & \alpha_{i-1} \ldots & & \alpha_i \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \alpha_i & \alpha_i \ldots & & \alpha_{i+1} \ldots & x_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_i & \alpha_i \ldots & & & \alpha_n \end{vmatrix} = -f'(\alpha_i).$$

Soit maintenant β une racine de l'équation $f'(x) = 0$ ne vérifiant pas l'équation $f(x) = 0$. On aura

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta & \beta \ldots & \beta \\ \beta & \alpha_2 & \beta \ldots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha_3 \ldots & \beta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta & \beta & \beta \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} = f(\beta).$$

De l'équation démontrée, on tire

$$f(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 \ldots & x \\ \ldots & \ldots \\ x \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} + x f'(x).$$

En décomposant semblablement $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{n-2}(x)$ et remplaçant, on obtient la formule

$$f(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & x. & . & x \\ x & \alpha_2 & .. & x \\ . & . & . & . \\ x & x & ... & \alpha_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \beta_1 & x & ... & x \\ x & \beta_1 & ... & x \\ . & . & . & . \\ x & x & ... & \beta_{n-1} \end{vmatrix} x$$

$$+ (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} \gamma_1 & x & ... & x \\ x & \gamma_2 & .. & x \\ . & . & . & . \\ x & x & ... & \gamma_{n-2} \end{vmatrix} x^2 + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-p} \begin{vmatrix} \pi_1 & x & ... & x \\ x & \pi_2 & ... & x \\ . & . & . & . \\ x & x & ... & \pi_{n-p} \end{vmatrix} x^p + \ldots$$

$$+ (-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & x \\ x & \lambda_2 \end{vmatrix} x^{n-2} + 1.2\ldots n(x-\mu)x^{n-1},$$

où $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})$ sont les racines de $f'(x) = 0$, $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-2})$ celles de $f''(x) = 0$, (λ_1, λ_2) celles de $f^{n-2}(x) = 0$ et μ la racine de $f^{n-1}(x) = 0$.

On voit par là que $f(x)$ est développée suivant une somme de déterminants.

EXERCICES SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PROBLÈME. — *Construire la conique osculatrice du quatrième ordre en un point donné d'une courbe du troisième degré dont on connaît neuf points* (en n'employant que la règle et le compas).

En chaque point d'une courbe quelconque il existe une conique qui a avec elle, en ce point, un contact du quatrième ordre. C'est, à proprement parler, la conique osculatrice, puisque son contact avec la courbe est le plus intime possible. C'est cette conique Σ que nous allons construire au point donné a d'une courbe du troisième degré dont on connaît neuf points.

Pour cela nous allons déterminer : 1° la tangente at de la conique au point a; 2° deux droites ae, ae' qui soient, par rapport à Σ, les polaires respectives de deux points i, i' pris sur la droite at; 3° un point α de la conique Σ. Ces éléments équivalent à cinq points donnés, et par conséquent déterminent une conique unique facile à construire.

Mais, avant d'entrer dans le détail de ces diverses constructions, commençons, pour plus d'ordre et de clarté, par rappeler ou établir quelques lemmes indispensables.

Lemmes préliminaires.

Lemme I. — Quand on connaît neuf points d'une courbe du troisième ordre, on sait construire, par les seuls procédés de la Géométrie élémentaire : 1° la tangente à la courbe en l'un de ces points; 2° le troisième point de rencontre de la courbe avec cette tangente; 3° les deux autres points d'intersection de la courbe avec une droite menée par l'un de ses points connus. (*Voir* le Mémoire de M. Chasles sur la construction de la courbe du troisième ordre déterminée par neuf points, *Comptes rendus*, 1853. On peut aussi consulter mes *Mélanges de Géométrie pure.*)

Lemme II. — Quand des coniques passent par quatre mêmes points d'une courbe du troisième ordre, les cordes qu'elles y interceptent passent toutes par un même point de cette courbe (Chasles, Mémoire précité).

Lemme III. — Quand des coniques ont entre elles un contact du troisième ordre en un point a, si d'un point quelconque de leur tangente commune at on leur mène des tangentes, tous les points de contact sont situés sur une même droite aboutissant au point a (Poncelet, *Traité des Propriétés projectives;* Chasles, *Traité des Coniques*, n° 371).

Lemme IV. — Quand des coniques formant un faisceau se touchent toutes en un point a, les cordes qu'elles interceptent dans une conique fixe qui leur est tangente en a passent par un même point.

Ce lemme et le précédent peuvent être regardés comme des cas particuliers du lemme II.

Lemme V. — Quand on connaît neuf points d'une courbe du troisième ordre, il est facile, en n'employant d'ailleurs que la règle et le compas, de construire le cercle osculateur à la courbe en l'un de ces points. (*Voir*, par exemple, le *Traité des Coniques*, n° 53.)

Lemme VI. — Problème. *Par deux points donnés faire passer une conique qui ait un cercle donné pour cercle osculateur en un point désigné* a.

Toutes les coniques qui passent par les deux points et touchent le cercle en a forment un faisceau. Les cordes qu'elles interceptent dans le cercle passent par un point fixe ρ (lemme IV). On déterminera ce point à l'aide de deux quelconques des coniques du faisceau, ce qui n'exige nullement qu'elles soient tracées. Le point d, où la droite ρa coupe le cercle osculateur, appartient à la conique demandée, dont on connaît ainsi cinq points.

Solution du problème proposé.

Les coniques qui ont, au point a, un contact du troisième ordre avec la courbe du troisième ordre, et par

conséquent aussi entre elles, forment un faisceau (F) dont fait partie la conique cherchée Σ; et si l'on regarde la tangente *at* comme étant double, c'est-à-dire comme formée de deux droites coïncidentes (dont chacune passerait par deux des quatre points infiniment voisins que toutes les coniques du faisceau (F) ont en commun), on peut dire que cette droite double est l'une des coniques du faisceau. Donc, si cette tangente rencontre la courbe du troisième ordre au point *t*, la tangente *t*P, en ce point *t*, va rencontrer la courbe au point P, qui est précisément le point de concours de toutes les cordes qu'elle intercepte dans les coniques du faisceau (F) (lemme II).

Menons, par ce point P, une droite quelconque P*c*, et soient *b*, *c* les points où elle coupe la courbe du troisième ordre. Ces deux points appartiennent à une même conique C du faisceau (F) (lemme II), qu'on déterminera (lemme VI) en la regardant comme étant simplement assujettie à passer par les points *b* et *c*, et à avoir, au point *a*, le même cercle osculateur que la courbe donnée, cercle qu'on aura préalablement construit (lemme V). Par la manière même dont le point P a été obtenu, ces conditions, équivalentes à cinq, entraînent évidemment ici la sixième condition à laquelle la conique C doit satisfaire, savoir : de posséder avec la courbe, au point *a*, un contact du troisième ordre et non pas seulement du deuxième.

Soient actuellement *i*, *i'* deux points pris arbitrairement sur la tangente *at*; *e*, *e'* les points de contact des tangentes menées de ces deux points à la conique C. Les droites *ae*, *ae'* sont respectivement les polaires des points *i*, *i'* relativement à toutes les coniques du faisceau (F) (lemme III), donc aussi relativement à la conique osculatrice cherchée Σ.

Enfin, si l'on mène la droite P*a* qui rencontre la

courbe du troisième ordre au point α, on possède toutes les données nécessaires à la construction de Σ. En effet, cette conique doit toucher en a la tangente at, passer par le point α, et diviser harmoniquement les segments ie, $i'e'$ interceptés par les cordes ae, ae' sur les droites $i\alpha$, $i'\alpha$ respectivement, et l'on sait qu'il n'y en a qu'une seule qui puisse satisfaire à ces conditions.

Le problème est donc résolu.

Théorèmes à démontrer.

I. Parmi les coniques qui ont, avec une courbe du troisième ordre, un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a, en général, trois qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point. Les points de contact de ces coniques sont trois points situés sur une même conique, ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné.

Si la courbe a un point de rebroussement, il n'y a plus qu'une seule de ces coniques.

II. En chaque point d'une courbe du troisième ordre il y a, en général, trois coniques qui ont avec elle un contact du troisième ordre en ce point, et qui le touchent encore en un autre point.

Ce nombre se réduit à un, si la courbe a un point double; il devient nul, si elle a un point de rebroussement.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1865.

COMPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES.

Classe de Mathématiques spéciales.

Étant données deux sections coniques tangentes en un point O, on leur mène la tangente commune OR, ainsi que les tangentes communes extérieures AA′, BB′ qui se coupent au point M.

Cela posé, on propose de démontrer que :

1° La droite PP′, qui joint les points P, P′ diamétralement opposés au point O dans les deux coniques, passe par le point M;

2° Les droites AB, A′B′, qui joignent les points de contact de chaque conique avec les tangentes extérieures communes, se coupent en un point R qui est situé sur la tangente commune intérieure OR;

3° Les tangentes menées aux deux coniques par le point R touchent ces courbes en des points situés sur la droite MO.

On fera voir que généralement le point R ne partage cette propriété avec aucun autre point, et on déterminera la condition qui doit être remplie pour qu'il existe une ligne telle, que les tangentes menées par chacun des points de cette ligne aux deux coniques donnent *quatre* points de contact en ligne droite.

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés un point P et une circonférence AA′BB′, on mène du point P deux sécantes PAA′, PB′B.

On joint A′ et B′, A et B, et on circonscrit une circonférence à chacun des deux triangles PAB, PA′B′. Ces deux circonférences se coupent au point P et en un second point M.

Cela posé, on demande le lieu du point M lorsque, l'une des deux sécantes restant fixe, on fait tourner la seconde.

Classe de Philosophie.

Ire question. — Dans un cube donné on inscrit une sphère, et dans cette sphère on inscrit un second cube. On demande le rapport entre les volumes de ces deux cubes.

IIe question. — Un bassin a la forme d'un prisme régulier à base hexagonale ; sa capacité est de 2000 hectolitres et sa profondeur de $1^{m},50$. On demande la longueur de chacun des côtés de la base.

Rhétorique scientifique.

Ire question. — Soient CD la directrice d'une parabole, A son sommet, MN une tangente quelconque. Du sommet A, on abaisse sur la tangente MN une perpendiculaire AP que l'on prolonge jusqu'à la rencontre de la directrice en Q, et l'on prend sur cette perpendiculaire, à partir du point A, une longueur AR = PQ. Trouver le lieu géométrique du point R.

IIe question. — Calculer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, sachant que le volume engendré par la révolution de ce triangle autour de son hypoténuse est équivalent à une sphère de rayon $\sqrt[3]{\frac{36}{5}}$, et que le même triangle, tournant successivement autour des deux côtés

de l'angle droit, engendre deux volumes dont la somme est équivalente à une sphère de rayon $\sqrt[3]{21}$.

Classe de seconde (sciences).

Ire question. — Étant donnée une équation du second degré, on demande d'en former une seconde qui ait pour racines les carrés des inverses des racines de la proposée.

Appliquer la méthode à l'équation

$$\sin 2a . x^2 - 2(\sin a + \cos a) x + 2 = 0.$$

IIe question. — On donne un angle trièdre qui a deux faces égales, et on demande de le couper par un plan de manière que la section soit égale à un triangle équilatéral donné.

Troisième.

Ire question. — On fait tourner une circonférence de cercle autour de l'un de ses points, et dans chacune de ses positions on lui mène des tangentes parallèles à une droite fixe donnée. Trouver le lieu des points de contact.

IIe question. — Un terrain de 60 *arpents de Paris* a été vendu à raison de 3000 *livres tournois* l'arpent, avant l'établissement du système métrique. Sa valeur a doublé depuis cette époque. On demande d'évaluer en *francs* la valeur actuelle d'un hectare, sachant :

1° Que 80 francs valent 81 livres tournois ;

2° Que l'arpent de Paris valait 100 *perches carrées* dont chacune était un carré de 18 *pieds* de côté ;

3° Que le pied était le sixième de la toise ;

4° Que 10 000 000 de mètres valent 5 130 740 toises.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Composition de licence (1865).

Étant donnés une droite fixe OX et un plan fixe O sur cette droite, trouver une courbe tangente au point O à la droite OX, et telle, que le rapport de la longueur MT de la tangente à la longueur de l'arc OM soit constant et égal à a (*).

Appliquer aux cas où

$$a = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{3}.$$

FACULTÉ DES SCIENCES DE POITIERS.

BACCALAURÉAT.

Composition du 12 novembre 1864.

Quand arrive-t-il que le segment et la zone sphérique sont exprimés par le même nombre ?

(Rayon de la sphère $= 3$) (vérification à faire).

Solution.

Considérons une sphère de rayon $R = 3$, et dans cette sphère concevons un segment de hauteur H.

(*) Le point T est sur la droite OX, et M est le point de contact de la tangente MT.

L'aire de la zone correspondante à ce segment a pour expression

$$2\pi RH;$$

c'est une fonction des deux quantités R et H.

Le volume du segment sera donné en fonction de R et H seulement, si l'une des bases est prise à la distance R du centre. Considérons donc un tel segment. Son volume aura pour expression

$$\frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{\pi}{2}\cdot H(2R - H)\times H.$$

Multiplions et divisons cette expression par $2R$ et mettons-la sous la forme

$$2\pi RH \times \frac{H^2 + 3H(2R - H)}{12R}.$$

On voit maintenant que la zone et le segment seront exprimés par le même nombre si l'on a

$$\frac{H^2 + 3H(2R - H)}{12R} = \frac{R}{3}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = 1.$$

De cette relation on tire

$$H = 2R, \quad H = R.$$

Ainsi le segment doit être la sphère ou la demi-sphère de rayon $R = 3$.

Vérification.—Il suffit d'écrire le volume de la sphère et celui de la demi-sphère sous la forme

$$2\pi R \times 2R \times \frac{R}{3}, \quad 2\pi R \times R \times \frac{R}{3}.$$

La vérification est manifeste (*).

(*) Extrait de la *Revue de l'Instruction publique*, n° 22, 31 août 1865.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 309

(voir tome XIV, page 263);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon (institution Sainte-Barbe).

r, p, n étant trois nombres entiers positifs, p et n deux nombres premiers entre eux, $\dfrac{(r-1)(r^{pn}-1)}{(r^p-1)(r^n-1)}$ *est un nombre entier.*

1. Soit x une variable et y une fonction de cette variable déterminée par la relation

$$(1) \qquad y=\frac{(x-1)(x^{pn}-1)}{(x^p-1)(x^n-1)},$$

il faut démontrer que y est une fonction entière de x.

2. La fonction entière $x^{pn}-1$ est exactement divisible par chacune des suivantes x^p-1, x^n-1; car on peut la mettre sous l'une ou l'autre de ces formes,

$$(x^n)^p-1, \quad (x^p)^n-1.$$

On en conclut que la fonction entière $\dfrac{x^{pn}-1}{x-1}$ est exactement divisible par chacune des fonctions entières $\dfrac{x^p-1}{x-1}$, $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ qui sont premières entre elles, d'après l'hypothèse faite sur p et n; donc $\dfrac{x^{pn}-1}{x-1}$ est exactement divi-

sible par le produit $\frac{(x^p-1)}{x-1}\cdot\frac{x^n-1}{x-1}$. Or on a

$$y=\frac{\left(\frac{x^{pn}-1}{x-1}\right)}{\left(\frac{x^p-1}{x-1}\right)\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)};$$

y est une fonction entière, d'où résulte que si x est un nombre entier r, y sera entier. C. Q. F. D.

Question 426

(voir tome XVII, page 33);

PAR MM. DESQ ET GRASSAT,
Elèves du lycée de Lyon.

Dans la solution de cette question, donnée t. Ier, 2e série, p. 111, on a traité un problème différent de celui qui était proposé. Voici l'énoncé du problème :

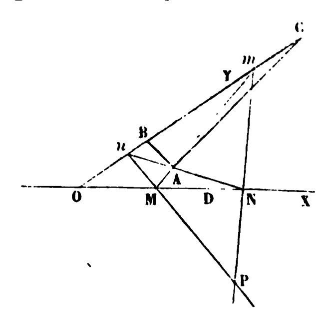
On donne dans le même plan un triangle ABC *et une droite* D; *on prend sur cette droite des longueurs* MN *telles, que chacune soit vue du point* A *sous un angle droit; les droites* AM, AN *coupent* BC *en deux points* m *et* n : *le lieu de l'intersection des droites* Mn, Nm [*est une droite et le lieu des points d'intersection des droites* BM, CN *ou* BN, CM] *est une conique* (*).

(FAURE.)

Au lieu de supposer l'angle MAN droit, supposons-le *quelconque*, nous ne ferons que généraliser. Cherchons le lieu du point de rencontre P de Mn et Nm. Les droites mM, nN passant toutes par le point A, on n'a pas à chercher le lieu de leur point de rencontre.

(*) Les mots placés entre crochets manquaient dans l'énoncé de la question 426. P.

Prenons BC pour axe des y et pour axe des x la droite



donnée D, qui rencontre au point O la droite BC. Nommons α, β les coordonnées du sommet A et k la tangente de l'angle fixe $\widehat{MAN}$.

Soient

$$Om = b, \quad On = b', \quad OM = a, \quad ON = a'.$$

On a, pour Mm,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

pour Nn,

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1.$$

On a les conditions

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{a'} + \frac{\beta}{b'} = 1.$$

Les droites Mn et Nm ont pour équation

$$(3) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1$$

et

$$(4) \qquad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

On a de plus

$$(5)\quad \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right)\sin\theta = k\left[1 + \frac{bb'}{aa'} - \left(\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'}\right)\cos\theta\right].$$

Il faut éliminer a, b, a', b' entre ces cinq équations.

Multiplions l'équation (1) par x, l'équation (3) par α, et retranchons; on a

$$\frac{\beta x}{b} - \frac{\alpha y}{b'} = x - \alpha;$$

opérant de même sur les équations (2) et (4), on a

$$\frac{\beta x}{b'} - \frac{\alpha y}{b} = x - \alpha.$$

De ces deux équations on tire

$$(\beta x + \alpha y)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) = 0$$

équation qui se décompose en

$$b = b' \quad \text{ou} \quad \beta x + \alpha y = 0.$$

Or $b = b'$ est impossible. Car si l'on venait à faire dans l'équation (5) l'hypothèse

$$b = b', \quad \text{d'où} \quad a = a',$$

on aurait $k = 0$, ce qui n'offre aucun sens.

Le lieu est donc la droite $\beta x + \alpha y = 0$, polaire du point A par rapport au système des deux droites BC, OD, résultat que la Géométrie donnait immédiatement.

Si maintenant au lieu de joindre les points Nm, Mn, on joint BM, CN ou BN, CM, comme il a été fait dans la solution de cette même question (t. I[er], 2[e] série, p. 111), le lieu du point d'intersection de ces droites est une conique. En effet, les côtés de l'angle A déterminent sur D deux systèmes homographiques; les lignes BM, BM_1 et

CN, CN_1, etc., forment deux faisceaux homographiques, le lieu des points d'intersection de deux rayons homologues est une conique passant par les points B et C (*).

Question 698

(voir 2e série, t. III, p. 141);

PAR M. MAX CORNU,
Élève de spéciales à Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Lorsqu'une courbe a quatre foyers sur un cercle, elle en a nécessairement douze autres situés par quatre sur trois cercles; tous ces cercles sont orthogonaux.

(LAGUERRE.)

Remarque I. — Lorsqu'un cercle (O) est orthogonal à un cercle (O'), ce cercle (O) passe par deux points ω_1, ω_2 qui, considérés comme des cercles de rayon nul, se coupent sur O'; ce sont les cercles limites du système des cercles tels que (O'), orthogonaux au cercle (O).

La réciproque est évidente : si le cercle (O) passe par deux points ω_1, ω_2, qui considérés comme des cercles de rayon nul se coupent sur (O'), le cercle (O) et le cercle O' sont orthogonaux entre eux.

De même le cercle (O'), orthogonal au cercle (O), passe par deux points ω'_1, ω'_2 qui, considérés comme des cercles de rayon nul, se coupent sur (O).

Remarque II. — On sait que tous les cercles passent par deux points de la droite de l'infini; et réciproquement que toutes les coniques qui passent par ces deux points sont des cercles. Un cercle de rayon nul, qui a son

---

(*) L'auteur de cette solution ne s'est pas trompé : il a corrigé l'énoncé évidemment fautif du tome XVII; il a eu le tort seulement de ne pas en avertir et de ne pas mettre en tête l'énoncé corrigé comme on l'a vu plus haut. P.

centre en un point ω, peut être considéré comme un système de deux droites joignant le point ω_1 aux deux points circulaires de l'infini ; donc, pour que (O) et (O') soient orthogonaux, il suffit qu'en joignant deux points de (O), par exemple ω_1 et ω_2, aux deux points circulaires de l'infini, ces systèmes de deux droites se coupent en deux points à distance finie situés sur (O') ; et de même, en joignant deux points particuliers ω'_1, ω'_2 aux deux points circulaires de l'infini, ces deux droites se couperont sur (O).

Un foyer d'une courbe est le point d'intersection de deux tangentes menées à la courbe par les points circulaires de l'infini (*). Je considère une courbe ayant quatre foyers sur un cercle ; je joins les quatre foyers aux points circulaires de l'infini ; j'obtiens huit droites distinctes, car si deux droites se confondaient en une seule, le cercle serait coupé en trois points par cette droite, ce qui est impossible.

Nous voyons donc en passant que la courbe qui a quatre foyers sur un cercle est au moins de quatrième classe. Ces huit droites tangentes à la courbe se coupent en seize points. Donc une courbe qui a quatre foyers sur un cercle en a douze autres ; d'ailleurs, parmi ces seize foyers, il n'y en a que quatre de réels.

Si l'on a une conique et que l'on joigne quatre points de cette conique à deux autres points I et J situés sur la courbe, on a deux faisceaux homographiques ; ces deux faisceaux de quatre droites se coupent en seize points situés quatre par quatre sur quatre coniques passant par I et J de façon que deux coniques ne passent pas par le même point. Et si l'on considère deux de ces coniques (O)

(*) M. Laguerre (*Comptes rendus*, t. LX, p. [illegible]) distingue deux sortes de foyers : les foyers *ordinaires* et les *foyers singuliers*.

et (O′), ainsi que les quatre points sur chacune d'elles, il y a sur la première deux points ω_1 et ω_2 tels, qu'en les joignant aux points I et J ces droites se coupent sur (O′); et il y a sur l'autre (O′) deux points ω'_1 et ω'_2 tels, qu'en les joignant aux points I et J ces droites se coupent en (O).

Imaginons maintenant que I et J soient les points circulaires de l'infini et que les droites des deux faisceaux soient des tangentes à la courbe menées par les points I et J, les seize points d'intersection des deux faisceaux sont seize foyers de la courbe; les quatre coniques sur lesquelles ils se trouvent quatre par quatre deviennent des cercles orthogonaux deux à deux. C. Q. F. D.

Remarque. — Si quatre foyers sont en ligne droite (ovales de Descartes), les douze autres sont sur trois cercles orthogonaux ayant leur centre sur la droite considérée.

Parmi les courbes qui jouissent de cette propriété, on peut citer les sections du tore. En effet, on peut considérer le tore comme la surface enveloppe d'une sphère de rayon fixe, dont le centre décrit un cercle. Étant donné un plan P, pour avoir les foyers de la section, on peut chercher les positions de la sphère mobile pour lesquelles elle est tangente au plan P; les points de contact sont des foyers. On obtient les positions du centre de la sphère en cherchant les points d'intersection du cercle directeur avec les deux plans parallèles au plan P, et dont la distance à ce plan est égale au rayon de la sphère mobile. Ces points sont au nombre de quatre. Ils sont sur un cercle dont le centre est en k, au point d'intersection de l'axe du tore et du plan P; car la distance du point k à chacun des foyers est égale à la longueur de toutes les tangentes qu'on peut mener de k à la sphère

mobile dans toutes ses positions; c'est une longueur fixe.

Remarque. — La corde de contact d'un foyer et de la courbe ou bien la directrice correspondant à une position m du centre de la sphère est la trace sur le plan P du plan passant par l'axe et la normale en m au cercle directeur. On en conclut la propriété suivante :

Les directrices correspondant à ces quatre foyers situés sur un cercle concourent au centre de ce cercle.

Le théorème précédent sur les sections du tore est un cas particulier d'un théorème dû à M. Moutard et énoncé par M. Laguerre (*loc. cit.*) sur les *anallagmatiques* (*) du quatrième ordre :

« Ces courbes peuvent de quatre manières différentes être considérées comme l'enveloppe de cercles coupant un cercle directeur fixe et ayant leurs centres sur une conique. Une anallagmatique a deux foyers singuliers réels communs aux quatre coniques qui peuvent servir à la description de la courbe, et seize foyers ordinaires, dont quatre réels, situés respectivement quatre par quatre sur les cercles directeurs correspondant aux quatre coniques mentionnées. »

Il est très-facile de démontrer que les directrices qui correspondent à chacun des foyers situés sur un même cercle concourent au centre de ce cercle.

Il est bien évident que toute section du tore est une anallagmatique; car tout plan mené par le pôle d'une surface anallagmatique est une courbe anallagmatique; et, dans le tore, tout point de l'axe est évidemment un pôle, et le point k est le pôle de la section.

(*) *Voir*, pour l'explication de ce mot, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 306, *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques*.

CORRESPONDANCE.

1. M. Griffiths nous a adressé à diverses reprises un certain nombre de théorèmes que nous allons réunir ici.

I. *Dans un triangle quelconque*, G *étant le centre de gravité de l'aire*, P *le point de rencontre des hauteurs, les cercles suivants ont le même axe radical* : 1° *le cercle des neuf points*; 2° *le cercle décrit sur* PG *comme diamètre*; 3° *le cercle circonscrit au triangle*; 4° *le cercle conjugué*; 5° *le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes de l'ellipse qui touche le triangle en ses milieux.*

II. *Soient* E_a, E_b, E_c *les centres des cercles exinscrits à un triangle* ABC : *le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle des neuf points du triangle* $E_aE_bE_c$.

III. *Soient* P, Q, R *les points de rencontre des bissectrices internes* AP, BQ, CR *avec les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC; L, M, N *les milieux de ces côtés*; p, q, r *les milieux des segments compris entre les sommets* A, B, C *et le point de concours des bissectrices (centre du cercle inscrit)*; X, Y, Z *les points d'intersection des bissectrices externes* AX, BY, CZ *avec les droites* MN, NL, LM; *et* l, m, n *les points de rencontre des droites* Xp, Yq, Zr *avec les médianes* AL, BM, CN. *Démontrer que les douze points* P, Q, R; L, M, N; p, q, r; l, m, n *sont situés sur la même conique.*

IV. *On prend deux triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *circonscrits à un triangle donné* ABC, *de telle sorte que les droites* Aα, Bβ, Cγ; Aα', Bβ', Cγ' *concourent en* P, P' : *on désigne par* A', B', C' *les points d'intersection* $(\beta\beta', \gamma\gamma')$,

$(\gamma\gamma', \alpha\alpha')$, $(\alpha\alpha', \beta\beta')$; *on a les propriétés suivantes :*

1° *Les droites* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *passent par un même point* Q, *et pareillement* $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ *passent par un même point* Q'.

2° *Les côtés des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *et les deux axes d'homologie des triangles* $(A'B'C', \alpha\beta\gamma)$, $(A'B'C', \alpha'\beta'\gamma')$ *sont tangents à une même conique conjuguée au triangle* A'B'C'.

3° *Réciproquement, les sommets* α, β, γ; α', β', γ' *et les centres d'homologie* P, P' *sont sur une même conique conjuguée au triangle* ABC.

V. M. Griffiths a bien voulu aussi nous envoyer l'expression du rayon de courbure en coordonnées trilinéaires. Cette formule, à laquelle notre savant collaborateur parvient par un élégant calcul, est trop compliquée pour trouver place ici, et les applications qu'en fait l'auteur ne semblent donner aucun avantage, sur ce point, aux coordonnées trilinéaires sur les coordonnées cartésiennes.

2. M. Camillo Tychsen, de Copenhague, nous communique une méthode d'intégration des équations du second ordre et du second degré de la forme

$$(1) \qquad P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + A\frac{dy}{dx} + S = 0.$$

En posant pour intégrale première

$$(2) \qquad CL + M + N\frac{dy}{dx} = 0,$$

où L, M, N sont des fonctions de x et de y, et C une constante, et en éliminant la constante C entre l'équation (2) et celle qui résulte de sa différentiation, on arrive à une équation de même forme que (1). L'identification de l'équation résultante avec l'équation (1) détermine L, M, N. On est ainsi ramené à l'intégration d'une équation du premier ordre.

3. *Extrait d'une lettre de M. X..., abonné en Belgique.*

« Je me permets de vous demander votre avis sur la valeur d'une solution donnée à une question proposée récemment dans un concours de Mathématiques.

» La question proposée était la suivante :

» *Trouver le lieu des foyers des courbes du second ordre qui ont même directrice, même tangente et même point de contact.*

» Or, c'est une propriété connue des courbes du second degré, que si l'on prolonge la tangente jusqu'à la directrice, la droite qui va du point d'intersection au foyer est perpendiculaire à celle qui va du foyer au point de contact. D'où l'on conclut que le lieu cherché est un cercle dont le diamètre est la portion de la tangente comprise entre le point de contact et celui où elle rencontre la directrice; et pour trouver l'équation du lieu, il suffit d'écrire que les coefficients angulaires des deux droites, qui vont, l'une du foyer au point de contact, et l'autre qui joint le foyer au point où la tangente rencontre la directrice, sont réciproques et de signes contraires : ce qui a été fait en prenant pour axes la directrice et la perpendiculaire passant par le point de rencontre de la tangente avec la directrice.

» Cette solution me paraît très-simple et irréprochable, et cependant elle a été comptée comme nulle. On a prétendu que la propriété invoquée n'est pas démontrée dans les éléments, et que, d'ailleurs, la question proposée n'était qu'une manière détournée de faire démontrer la propriété sur laquelle on s'appuyait.

» Aucune de ces deux assertions ne me paraît fondée. L'étude complète de la Géométrie analytique plane comporte évidemment celle des propriétés communes aux courbes du second degré, et lorsqu'une propriété com-

mune est connue et démontrée, elle passe à l'état de théorème, et l'on peut s'en étayer pour résoudre les questions qui peuvent en dépendre : ceci est élémentaire en Mathématiques. Je comprendrais la seconde assertion si la propriété contestée était la seule qui pût donner la solution du problème ; mais il n'en est pas ainsi : on pouvait déduire le lieu soit de l'équation focale, soit en s'appuyant sur le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice, et il est évident que si l'élève a préféré partir de la propriété contestée, c'est qu'elle donne immédiatement le lieu.

» La question à résoudre est donc celle de savoir si, comme je le crois, on a pu légitimement s'appuyer sur la propriété des courbes du second degré rappelée ci-dessus pour déterminer le lieu proposé, et c'est là-dessus que je voudrais vous voir donner votre avis dans le prochain numéro de votre journal.

» Il importe que des jeunes gens ne puissent plus être frappés, soit pour avoir trop bien su, soit pour avoir su plus que leurs concurrents, et, sous ce rapport, ce que vous en direz dans les *Annales* pourra servir de règle si des cas analogues viennent à se représenter. »

Note du rédacteur — On nous fait beaucoup d'honneur en supposant que notre opinion exprimée puisse plus tard servir de règle dans un concours. Nous allons cependant donner notre humble avis sur le cas qui nous est soumis par M. X..., en tâchant d'ajouter aux excellentes raisons qu'il a déjà présentées.

Le théorème cité est bien connu des élèves de Mathématiques spéciales en France. On l'enseigne dans les cours et il est donné dans plusieurs ouvrages élémentaires. On doit présumer que l'élève qui l'a cité en connaissait la démonstration ; mais si l'on avait quelque doute sur ce point, il était bien facile de les lever en interro-

geant l'élève. Cela aurait mieux valu que de recourir à la mesure rigoureuse de l'exclusion. Les fins de non-recevoir sont toujours regrettables, parce qu'elles sont de pure forme et ne vont pas au fond des choses.

La seconde prétention me paraît encore plus insoutenable. Pour qu'il y eût ce cercle vicieux que le jury du concours prétend avoir reconnu, il faudrait admettre : 1° que l'élève a d'abord trouvé le lieu par une méthode quelconque ; 2° qu'il en a conclu comme corollaire le théorème en question ; 3° que, renversant tout l'ordre suivi jusque-là, il a pris ce théorème comme base de sa démonstration. Quelle effrayante imagination ! Je dis effrayante, parce qu'avec un pareil système deux lignes de l'écriture d'un honnête homme suffiraient pour le faire pendre. D'ailleurs, il faudrait prouver que cet ordre d'idées si subtilement imaginé est celui du candidat. On a donc pris une simple conjecture pour un fait avéré. Nous pensons qu'en France une pareille discussion, soumise à l'autorité compétente, aurait été cassée et l'épreuve recommencée.

Nous n'admettons pas non plus qu'une question posée dans un concours puisse être une *manière détournée* d'amener *une autre* question. Tout doit être clair dans un énoncé. Voulez-vous que la question soit traitée par le calcul, dites-le ; qu'on en déduise telle et telle conséquence, dites-le encore, et n'obligez pas le candidat à deviner une intention que vous n'avez nullement exprimée. P.

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XXI.

Le Cointe (S. J.), Professeur à l'École préparatoire Sainte-Marie, à Toulouse. — *Solutions développées de* 300 *problèmes qui ont été proposés dans les compositions pour l'admission au grade de Bachelier ès Sciences*. In-8° de vii-376 pages, avec figures dans le texte. Paris, 1865; Gauthier-Villars. — Prix : 6 fr.

Le titre de cet ouvrage en indique l'objet. Nous recommandons spécialement aux élèves la sixième partie, où se trouve une intéressante collection de questions relatives aux maximums et aux minimums.

XXII.

Housel, ancien élève de l'École Normale, professeur de Mathématiques. — *Introduction à la Géométrie supérieure*. Paris, 1865. In-8° de xii-270 pages et 8 pl. Gauthier-Villars. — Prix : 6 fr.

Ouvrage utile et fait avec soin, où l'on trouve les théorèmes les plus importants de la Géométrie supérieure avec leurs principales applications. Voici les titres des dix-neuf chapitres : Transversales. — Rapport harmonique, polaires. — Polaires dans le cercle et les coniques. — Puissance des points, axes radicaux. — Rapport anharmonique, division homographique. — Théorie de l'involution. — Applications de l'involution. — Centre de similitude. — Contact d'un cercle avec trois autres. — Théorèmes et problèmes sur le triangle. — Systèmes de points

en ligne droite. — Droites mobiles, triangles homologiques. — Figures homographiques et corrélatives. — Théorème de Pascal. — Théorèmes de Newton et de Carnot. — Autres propriétés des coniques. — Construction des coniques. — Rotation des figures.

XXIII.

Mathematical Questions... *Questions mathématiques avec leurs solutions*, extraites du journal *The educational Times*, publiées par M. Miller, professeur de Mathématiques à Huddersfield. Tomes II et III.

The educational Times est l'organe d'une Société des membres de l'enseignement (*College of preceptors*), reconnue par le gouvernement anglais comme établissement d'utilité publique. Le but de cette Société est de relever l'enseignement des classes moyennes par l'examen sérieux de ceux qui se destinent au professorat. Les candidats se présentent volontairement à ces examens, afin d'obtenir un diplôme de la Société et de s'en faire un titre auprès des chefs d'institution. La Société a créé en même temps une caisse de secours mutuels et un bureau de placement. Son conseil se réunit tous les mois pour discuter des questions de méthodes.

The educational Times, rédigé, pour la partie littéraire, par M. Isbister, et, pour la partie mathématique, par M. Miller, donne chaque mois des énoncés de problèmes ou de théorèmes qui sont résolus ou démontrés dans les numéros suivants. Ces questions sont signées des plus grands noms, Cayley, Sylvester, etc. Cela nous dispense de faire l'éloge de la publication de M. Miller, à laquelle nous ferons de temps en temps quelques emprunts.

P.

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE, AVEC APPLICATIONS AUX SECTIONS CONIQUES

(voir p. 481);

Par M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie, Sous-Directeur de la fonderie de Toulouse.

§ IV. — *Droite conjuguée et point conjugué d'une conique inscrite.*

1. *Une conique inscrite au triangle de référence a pour ligne réciproquement conjuguée par polarité inverse une conique circonscrite.*

Lorsqu'une droite reste tangente à une conique inscrite au triangle de référence, son pôle décrit une droite qui est nommée droite conjuguée de la conique.

La droite de pôles inverses de la tangente passe par un point fixe qui est le pôle inverse de la droite conjuguée et qui est nommé point conjugué de la conique.

La droite conjuguée est la droite qui passe par les points d'intersection de chaque côté du triangle avec la corde de contact des deux autres côtés.

Le point conjugué est l'inverse du point de concours des droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé.

La théorie des lignes réciproquement conjuguées par polarité inverse, combinée avec les propriétés de la conique circonscrite qui ont été établies dans le paragraphe précédent, fournit très-facilement et sans aucun calcul la démonstration de ces divers théorèmes.

On peut aussi démontrer synthétiquement toutes ces

propriétés par le calcul en faisant voir : 1° que les deux coniques

$$\frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{u} + \frac{\gamma}{v} = 0,$$

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 + \gamma^2 v^2 - 2\alpha\beta tu - 2\alpha\gamma tv - 2\beta\gamma uv = 0$$

sont réciproques par polarité inverse, c'est-à-dire que les points de l'une sont les pôles inverses des tangentes de l'autre; 2° que la droite

$$\alpha t + \beta u + \gamma v = 0$$

est à la fois le lieu de l'inverse du point de la circonscrite et du pôle de la tangente de l'inscrite; 3° que l'enveloppe de la polaire du point de la circonscrite et l'enveloppe de la droite de pôles inverses de la tangente de l'inscrite se réduisent à un même point, pôle inverse de la droite

$$\alpha t + \beta u + \gamma v = 0;$$

4° que cette droite passe par les points d'intersection de chaque côté du triangle avec la corde de contact des deux autres côtés, et qu'elle a pour pôle le point de concours des droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé.

Je crois inutile de m'arrêter aux détails de ces deux genres de démonstration.

2. Lorsque la conique est l'ellipse inscrite au triangle de référence par les milieux des côtés, son équation devient

$$a^2 t^2 + b^2 u^2 + c^2 v^2 - 2abtu - 2actv - 2bcuv = 0,$$

et sa conjuguée par polarité inverse est le cercle circonscrit

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{u} + \frac{c}{v} = 0,$$

comme il était facile de le prévoir. La droite conjuguée est à l'infini, le point conjugué est l'inverse du centre de gravité du triangle.

Lorsqu'une ligne a des points à l'infini, ces points sont évidemment les pôles inverses de droites qui passent par l'inverse du centre de gravité du triangle, et qui sont tangentes à la ligne réciproque par polarité inverse de la ligne donnée. Les points de contact de ces tangentes sont à leur tour les pôles inverses des asymptotes de la ligne donnée.

La construction des asymptotes à une conique inscrite peut donc se ramener à la construction des tangentes à une conique circonscrite menées par l'inverse du centre de gravité du triangle, ou plutôt à la recherche des points de contact de ces tangentes.

3. Cinq tangentes d'une conique étant données, on peut prendre trois de ces tangentes pour côtés du triangle de référence, construire soit la droite conjuguée, soit le point conjugué de la conique, et se servir de l'un ou de l'autre pour décrire la courbe par l'enveloppe des tangentes.

Mais si l'on veut reconnaître rapidement la nature de la conique et en construire les éléments, le plus simple sera d'opérer un changement de triangle de référence qui ramène au cas de la conique circonscrite. Les propriétés de la droite conjuguée ou du point conjugué permettent en effet de trouver de suite le triangle des points de contact, et de construire relativement à ce nouveau triangle de référence, qui est un triangle inscrit, la droite conjuguée ou le point conjugué de la conique.

Sur ce second triangle de référence la nature de la conique est reconnaissable aux caractères simples que j'ai signalés; on peut néanmoins remarquer ceux-ci, appli-

cables au premier triangle et déduits de la considération des points ou tangentes à l'infini :

Une conique inscrite à un triangle est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que l'inverse du centre de gravité du triangle est situé à l'intérieur de la conique circonscrite, qui est la réciproque par polarité inverse de la conique donnée, sur cette conique réciproque elle-même ou à l'extérieur.

Dans la parabole inscrite, la droite conjuguée passe par le centre de gravité du triangle; le point conjugué est sur la polaire de l'inverse du centre de gravité.

§ V. — *Questions diverses.*

Les propriétés des droites conjuguées et des points conjugués des coniques sont applicables à beaucoup de problèmes concernant la construction de ces courbes, ainsi qu'à un grand nombre d'autres questions; j'en donnerai une idée dans ce qui va suivre.

1. *Construction de coniques passant par des points et touchant des droites.*

Je citerai d'abord quelques théorèmes sur les enveloppes des droites conjuguées et sur les lieux des points conjugués de coniques assujetties à quatre conditions, théorèmes dont je passerai d'ailleurs les faciles démonstrations.

La droite conjuguée d'une conique circonscrite au triangle de référence, et passant par un point donné, passe par l'inverse de ce point; le point conjugué de la conique est sur la polaire du point donné.

La droite conjuguée d'une conique circonscrite, et tangente à une droite donnée, enveloppe une conique circonscrite qui a pour droite conjuguée la droite don-

née; le point conjugué de la conique est sur une conique inscrite qui a pour droite conjuguée la droite donnée.

La droite conjuguée d'une conique inscrite, et tangente à une droite donnée, passe par le pôle de la droite donnée; le point conjugué est sur la droite de pôles inverses de la droite donnée.

La droite conjuguée d'une conique inscrite, et passant par un point donné, enveloppe une conique circonscrite qui a pour point conjugué le point donné; le point conjugué est sur une conique inscrite qui a pour point conjugué le point donné.

Voici maintenant quelques exemples de construction de coniques assujetties à passer par des points et à toucher des droites.

Qu'il s'agisse de construire la conique dont on connaît quatre tangentes avec le point de contact de l'une d'elles. Je prends pour triangle de référence le triangle formé par trois de ces tangentes, en y introduisant celle dont le point de contact est connu; le point conjugué de la conique cherchée est à l'intersection de la droite de pôles inverses de la quatrième tangente avec l'inverse de la droite qui joint le point de contact au sommet opposé.

Qu'il s'agisse de construire la conique passant par quatre points et tangente à une droite quelconque. Je prends trois des quatre points pour sommets du triangle de référence; le point conjugué de la conique cherchée est à l'intersection de la polaire du quatrième point avec la conique inscrite qui a pour droite conjuguée la droite donnée. Donc il y a deux solutions.

Qu'il s'agisse encore de construire une conique passant par trois points et tangente à deux droites. Je prends les trois points pour sommets du triangle de référence; la droite conjuguée de la conique cherchée est tangente com-

mune à deux coniques circonscrites qui ont pour droites conjuguées les droites données; le point conjugué de la conique cherchée est à l'intersection de deux coniques inscrites qui ont pour droites conjuguées les droites données. Il y a donc quatre solutions.

2. *Faire passer par quatre points une conique semblable à une conique donnée.*

Ce problème, qui comprend comme cas particuliers ceux de la parabole et de l'hyperbole équilatère passant par quatre points, se résout très-simplement par ce théorème que met en évidence la formule citée (2e partie, § II) :

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\Delta}{R} + 1}{\frac{\Delta}{R} - 1}.$$

La droite conjuguée d'une conique passant par trois points et semblable à une conique donnée enveloppe un cercle concentrique au cercle circonscrit, et dont le rayon a pour valeur

$$R = \frac{\frac{M}{N} + 1}{\frac{M}{N} - 1}.$$

Il est évident en effet que la droite conjuguée de la conique cherchée, par rapport à l'un quelconque des triangles déterminés par les quatre points, est la tangente menée par l'inverse du quatrième point à un cercle de rayon connu. Donc il y a deux solutions.

Dans le cas de la parabole déterminée par quatre points, le cercle se confond avec le cercle circonscrit, et il existe deux paraboles passant par quatre points, pourvu que l'inverse du quatrième point soit situé en dehors du cercle

circonscrit, ce qui arrive toujours lorsque les quatre points donnés forment un quadrilatère convexe. Les formules du § II donnent les paramètres de ces deux paraboles :

$$p^2 = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{R}\left(\frac{\Delta}{R}+1\right)^{-3} = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{8R},$$

$$p'^2 = \frac{\delta'_1 \delta'_2 \delta'_3}{R}\left(\frac{\Delta'}{R}+1\right)^{-3} = \frac{\delta'_1 \delta'_2 \delta'_3}{8R}.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère déterminée par quatre points, la droite conjuguée est tout simplement la droite qui joint l'inverse du quatrième point au centre du cercle circonscrit.

Il n'y a donc qu'une hyperbole équilatère passant par quatre points, dont la longueur de l'axe se calcule par la formule

$$a^2 = \frac{\delta_1 \delta_2 \delta_3}{R}.$$

Le centre de l'hyperbole équilatère passant par quatre points peut être obtenu directement par ce théorème :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par trois points est le cercle qui passe par les milieux des côtés du triangle (cercle des neuf points).

3. *Propriétés des foyers des coniques tangentes à trois droites.*

Les deux foyers d'une conique tangente à trois droites étant deux points inverses, lorsqu'une conique est inscrite à un triangle, et que l'un des foyers décrit une ligne donnée, l'autre foyer décrit la ligne inverse. De là des théorèmes tels que ceux-ci :

Lorsqu'une conique est inscrite à un triangle et que l'un des foyers décrit une conique circonscrite, l'autre foyer décrit une droite.

Le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites est le cercle circonscrit au triangle.

4. *Parabole et hyperbole équilatère déterminées par quatre tangentes.*

La construction de la parabole tangente à quatre droites ne peut offrir aucune difficulté. On a le moyen de trouver le foyer par l'intersection de deux cercles. La droite conjuguée de la courbe relativement au triangle formé par trois tangentes est la droite qui joint le pôle de la quatrième tangente au centre de gravité du triangle.

Quant à l'hyperbole équilatère tangente à quatre droites, dont l'existence réelle dépend de la nature du triangle, le plus simple est de la construire en déterminant d'abord son centre; car, une fois le centre obtenu, on trouve facilement cinq tangentes. Or le centre d'une hyperbole équilatère tangente à quatre droites se détermine par le théorème suivant :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères, tangentes à trois droites, est le cercle (*aujourd'hui nommé* cercle conjugué), *réel ou imaginaire suivant que le triangle est obtusangle ou acutangle, qui a pour centre le point de concours des trois hauteurs du triangle, et qui passe par les points d'intersection* (réels ou imaginaires) *du cercle circonscrit avec le cercle des neuf points.*

5. *Remarque sur le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points.*

On sait que le lieu des centres des coniques qui passent par quatre points est une conique passant par neuf points : les milieux des six droites que les quatre points déterminent, et les points d'insersection des deux droites de chaque système de droites passant par les quatre points. Il résulte de là que si l'on prend trois des neuf points pour

sommets du triangle de référence, les inverses des six autres seront en ligne droite.

On peut ainsi construire directement le centre de la conique qui passe par cinq points, par l'intersection de deux droites. En effet, je prends pour sommets du triangle de référence les milieux des côtés de l'un des triangles que les cinq points déterminent, et, considérant successivement les deux séries de coniques passant par les trois points dont je suis parti, et par l'un des deux autres, j'obtiens, pour les lieux des inverses des centres, deux droites dont l'intersection me donne l'inverse du centre de la conique qui passe par les cinq points.

CONSTRUIRE UNE SPHÈRE TANGENTE A QUATRE SPHÈRES DONNÉES;

Par M. E. BARBIER.

1. Si un tétraèdre T est homothétique aux quatre tétraèdres T_1, T_2, T_3 et T_4 ayant chacun avec T un sommet commun :

1° La sphère O, circonscrite au tétraèdre T, est tangente aux quatre sphères O_1, O_2, O_3 et O_4 circonscrites aux quatre autres tétraèdres;

2° Les points de contact sont les sommets du tétraèdre T;

3° Les faces du tétraèdre T passent par les droites P_1, P_2, P_3 et P_4, qui sont situées dans un même plan M, et qui sont les axes de similitude des tétraèdres T_1, T_2, T_3 et T_4 et des sphères O_1, O_2, O_3 et O_4 pris trois à trois;

4° Les faces du tétraèdre T_1 passent par les quatre droites Q_1, P_2, P_3 et P_4 situées dans le plan M; la droite Q_1 est l'intersection du plan M par un plan qui contient le

centre de O_1, et qui est parallèle au plan des centres de O_2, de O_3 et de O_4.

2. Il résulte de ces propositions et de leurs réciproques que le problème de construire une sphère tangente à quatre sphères données revient à inscrire dans une sphère un tétraèdre dont les faces passent par quatre droites faciles à déterminer et situées dans un même plan.

3. Proposons-nous, par exemple, d'inscrire dans une sphère O_1 un tétraèdre dont les faces passent par les droites Q_1, P_2, P_3 et P_4, situées dans un même plan M.

Menons par la droite Q_1 un plan V qui coupe la sphère O_1 suivant un cercle C_1; dans ce cercle, inscrivons un triangle U, dont les côtés passent par les points où P_2, P_3 et P_4 rencontrent Q_1; cela fait, par les côtés du triangle U, menons trois plans passant respectivement par les droites P_2, P_3 et P_4; ces trois plans forment un trièdre qui, généralement, n'a point son sommet sur la sphère; il détermine donc sur la sphère un triangle d'entrée U et un triangle de sortie U'; le plan V' du triangle U' coupe le plan M suivant une droite R_1. Par la droite R_1, il suffit de mener un plan tangent à la sphère O_1 pour avoir au point de contact l'un des sommets du tétraèdre demandé.

4. La construction précédente est fondée sur cette propriété du pentaèdre UU' de pouvoir se déformer de manière qu'il soit toujours inscrit dans la sphère O_1, et que ses cinq faces passent toujours respectivement par les cinq droites Q_1, P_2, P_3, P_4 et R_1.

Pour déterminer la droite R_1 sans avoir à construire préalablement le triangle U, il suffit de prendre pour plan V un plan tangent à la sphère, et de considérer le triangle U comme réduit au point de contact.

5. La propriété des faces d'un pentaèdre inscrit, de pouvoir tourner autour de cinq droites situées dans un même plan, est analogue à la propriété des côtés du quadrilatère inscrit, d'être pivotants autour de quatre points situés sur une même ligne droite.

On démontre facilement cette propriété par le moyen de ce théorème : *Si les côtés d'un quadrilatère inscrit dans un cercle* C *coupent la corde commune du cercle* C *et d'un autre cercle* C′ *en quatre points, il y a une infinité de quadrilatères inscrits dans* C′ *et dont les côtés passent par les mêmes points de la corde commune.*

6. On peut éviter la construction de la droite Q_1, si l'on remplace les sommets du triangle U par leurs homologues dans les sphères O_2, O_3 et O_4 qui déterminent un triangle t inscrit entre les trois cercles fournis par l'intersection des sphères O_2, O_3 et O_4 et d'un plan v, parallèle à V, et mené par l'axe de similitude des trois sphères.

On sait construire le triangle t, comme on l'a vu dans la construction du cercle tangent à trois cercles donnés, mais on peut éviter cette construction auxiliaire en prenant pour plan v un plan tangent commun aux trois sphères O_2, O_3 et O_4 ; le triangle t est alors le triangle déterminé par les trois points de contact.

7. Pour compléter les analogies des problèmes du contact des cercles et du contact des sphères, il me reste à donner une construction qui fasse trouver à la fois les quatre points de contact de la sphère tangente à quatre sphères données.

Cette construction est analogue à la construction de l'hexagramme inscrit par laquelle on trouve à la fois les trois points de contact d'un cercle tangent à trois cercles donnés.

Mener onze droites consécutives de la manière suivante : la première passe par le centre de similitude de O_1 et de O_2 et aboutit à des points de O_1 et de O_2 qui ne sont pas homologues ; la deuxième, partant d'un point ainsi trouvé sur O_2, passe par le centre de similitude de O_2 et de O_3, et elle aboutit à un point de O_3 qui n'est point homologue du point trouvé sur O_2 ; la construction se continue d'une manière semblable entre O_3 et O_4 ; puis entre O_4 et O_1 ; de nouveau entre O_1 et O_2, et ainsi de suite.

Il est bien entendu que les centres de similitude choisis pour la construction sont coordonnés de manière qu'ils soient dans le même plan M.

La construction prolongée indéfiniment ne se ferme point en général ; les points obtenus sur O_1 sont dans un plan o_1 qui coupe le plan M suivant la droite R_1 ; il suffit de mener par R_1 un plan tangent à la sphère O_1 pour avoir un des points de contact demandés.

On a les autres points de contact en déterminant de même les droites R_2, R_3 et R_4 par les plans o_2, o_3 et o_4.

8. *Tous les points donnés par la construction des onze droites, continuée indéfiniment, sont sur une même sphère* Ω.

Toutes les sphères Ω, *et par suite les deux sphères tangentes auxquelles donne lieu la considération du plan de similitude* M, *ont une section commune* (*réelle ou imaginaire*) *dans ce plan* M.

9. Nous indiquerons les démonstrations des théorèmes énoncés dans les n°s 7 et 8.

1° La ligne formée par les droites consécutives menées comme on l'a vu (7) est inscriptible dans une sphère.

Il suffit de démontrer ce théorème pour quatre droites consécutives quelconques données par la construction.

Supposons, par exemple, que ces droites soient menées entre O_1 et O_2, entre O_2 et O_3, entre O_3 et O_4 et entre O_4 et O_1.

Menons, par le point situé sur O_3, une ligne auxiliaire passant par le centre de similitude de O_3 et de O_1, et terminée à un point de O_1 non homologue du point de O_3.

Il faut remarquer que la ligne auxiliaire forme, avec les deux premières droites, trois côtés d'un hexagramme inscriptible dans un cercle (construction du cercle tangent à trois cercles donnés); de même cette ligne auxiliaire et les deux autres droites sont trois côtés d'un hexagramme inscriptible dans un cercle.

Ces deux cercles ont la ligne auxiliaire pour corde commune, ils sont donc sur une même sphère.

2° Les sphères analogues à Ω ont une section réelle ou imaginaire commune dans le plan de similitude M. En effet, il est facile de voir qu'un point appartenant à l'une des droites R_1, R_2, R_3 et R_4 a la même puissance par rapport à toutes les sections faites dans les sphères Ω; ces quatre droites donnent donc des cordes communes à toutes les sphères Ω.

10. On peut donner une autre construction de la sphère tangente à quatre sphères.

A partir d'un point quelconque de O_1, entre les sphères O_1 et O_2, menons une première droite passant par un centre de similitude A de O_1 et O_2, et non terminée par des points homologues; à partir du point ainsi trouvé sur O_2, entre les sphères O_2 et O_3, menons une deuxième droite, passant par un centre de similitude B de O_2 et de O_3, et non terminée par des points homologues; enfin, par le point trouvé sur O_3, entre les sphères O_3 et O_4, menons une troisième droite, passant par un centre de

similitude C de O_3 et de O_4, et non terminée par des points homologues.

La sphère Ω, circonscrite aux trois droites obtenues, peut être une sphère tangente aux quatre sphères données; mais, généralement, la sphère Ω coupera les sphères O_1, O_2, O_3 et O_4. Il faudra, pour avoir un des points de contact, celui qui est sur O_1, par exemple, mener le plan du cercle d'intersection de Ω et de O_1, et par l'intersection de ce plan avec le plan ABC mener un plan tangent à O_1.

Les sphères Ω, et en particulier les deux sphères tangentes qui font partie de cette suite de sphères, ont le plan ABC pour plan radical commun.

Le lieu de leurs centres est la ligne qui projette le centre radical des quatre sphères sur le plan ABC.

11. La construction du cercle tangent à trois cercles présente la propriété de l'hexagramme inscrit sous cette forme : *Trois cordes d'un cercle sont deux à deux comprises entre trois angles dont les sommets sont en ligne droite.*

La construction de la sphère tangente donne une proposition analogue : *Quatre sections planes d'une sphère sont deux à deux sur six cônes dont les sommets sont ceux d'un quadrilatère plan.*

EXTENSION AU CAS DE L'ESPACE

des considérations développées par M. Mannheim pages 133 à 135 des *Nouvelles Annales* (mars 1865);

PAR M. CARRIÈRE,
Elève du lycée Louis-le-Grand.

Soient

(1) $$S = 0,$$

(2) $$\Sigma = 0$$

les équations de deux surfaces du second degré; le lieu des centres des surfaces du second degré passant par leur intersection s'obtient en éliminant λ entre les dérivées prises par rapport à x, y et z de l'équation

(3) $$S + \lambda\Sigma = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{S'_x}{\Sigma'_x} = \frac{S'_y}{\Sigma'_y} = \frac{S'_z}{\Sigma'_z};$$

les points du lieu sont donc les points communs aux surfaces

(4) $$S'_x \Sigma'_y - S'_y \Sigma'_x = 0,$$

(5) $$S'_x \Sigma'_z - S'_z \Sigma'_x = 0,$$

(6) $$S'_y \Sigma'_z - S'_z \Sigma'_y = 0.$$

Or, l'intersection de deux quelconques de ces surfaces se compose d'une droite non située sur la troisième, et d'une courbe gauche du troisième ordre commune aux trois : cette courbe du troisième ordre est donc elle seule le lieu des centres.

Cette courbe *passe par les sommets des quatre cônes du second degré* que l'on peut mener par l'intersection des deux surfaces $S = 0$, $\Sigma = 0$.

Cela posé, remarquons que les termes constants des équations (1) et (2) ne sont pas intervenus dans les dérivées de l'équation (3). Le lieu ne sera donc pas changé si nous prenons pour équations des deux premières surfaces

$$S + k = 0, \quad \Sigma + l = 0,$$

dans lesquelles k et l sont des constantes arbitraires. Interprétons géométriquement ce résultat analytique.

L'équation

$$S + k = 0,$$

si l'on fait varier k, représente des surfaces concentriques et homothétiques à la surface dont l'équation est (1). Appelons A le faisceau que forment ces surfaces; B le faisceau analogue formé par les surfaces dont l'équation est $\Sigma + l = 0$; on conclut de ce qui précède que :

Quelles que soient deux surfaces prises dans les faisceaux A *et* B, *les surfaces du second degré passant par leurs points communs auront leurs centres sur une courbe unique du troisième degré* C.

Si les deux premières surfaces des faisceaux A et B sont tangentes entre elles, leur point de contact appartiendra à la courbe C.

En effet, prenons pour origine le point de contact et pour plan des XY le plan tangent commun : les deux surfaces auront pour équations

$$Z = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$
$$Z = A_1x^2 + A'_1y^2 + \ldots$$

Si l'on retranche ces deux équations membre à membre,

on a, en posant $A - A_1 = a$, $A' - A'_1 = a'$, ...,

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0,$$

surface passant par les points communs aux deux précédentes : c'est un cône du deuxième degré dont le sommet est au point O. Or ce sommet est le centre d'une des surfaces

$$S + \lambda\Sigma = 0.$$

Donc, si deux des surfaces des faisceaux A et B sont tangentes entre elles, leur point de contact appartient à C. De sorte que :

Les points où les surfaces du faisceau A *sont touchées par les surfaces du faisceau* B *sont sur la courbe du troisième degré* C.

On peut en déduire le nombre des surfaces du faisceau B qui touchent une surface du second degré F.

Pour cela il faut chercher le nombre des points d'intersection de la courbe C avec la surface F. Or, la courbe C, jointe à la droite dont les équations sont, par exemple,

$$S'_x = 0, \quad \Sigma'_x = 0,$$

forme une courbe du quatrième degré, intersection des surfaces définies par les équations (4) et (5). Cette courbe du quatrième degré coupera la surface F en huit points. Enlevant les deux points d'intersection donnés par la droite, on en conclut que la courbe gauche du troisième degré C coupera la surface F en six points. Donc :

Il y a en général six surfaces B *qui touchent une surface du second degré donnée.*

Si les surfaces du faisceau B sont des sphères concentriques, les points où elles touchent les surfaces du faisceau A ne sont autres que les pieds des normales abaissées sur ces surfaces du centre fixe de toutes les sphères du faisceau B. Donc :

Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point fixe sur une série de surfaces du second degré concentriques et homothétiques est une courbe du troisième degré.

Nous avons vu que cette courbe gauche coupait une surface du second degré en général en six points. Donc :

On peut mener six normales à une surface du second degré par un point donné dans l'espace.

Enfin on peut ajouter que :

Le lieu des sommets des cônes du second degré passant par l'intersection de deux surfaces du second degré, l'une du faisceau A, l'autre du faisceau B, est la courbe C.

THÉORÈMES ;

PAR M. GROUARD,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

I.

1. On donne un cercle O et un point F dans un plan : l'enveloppe d'un côté d'un angle constant dont le sommet décrit le cercle O, et dont l'autre côté passe par le point F, est une conique à centre.

2. Si l'on fait varier la grandeur de cet angle, toutes les coniques que l'on obtient sont semblables et ont le point F pour foyer commun.

3. Ces coniques ont pour enveloppe le cercle donné qui les touche chacune doublement.

4. Les directrices correspondant au foyer F passent par un même point.

5. Le lieu des seconds foyers est un cercle concentrique au cercle donné.

II.

On donne trois paraboles ayant un foyer commun. Trois droites primitivement en coïncidence avec les axes tournent simultanément d'un même angle autour du foyer. Dans une de leurs positions elles rencontrent respectivement les trois paraboles en trois points.

1. Le lieu du centre du cercle passant par ces trois points est une nouvelle parabole.

2. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes aux trois mêmes points est une droite.

3. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle formé par les normales est encore une parabole.

4. Cette dernière parabole est aussi le lieu des projections du foyer donné sur les normales à la parabole, lieu du centre du premier des trois cercles dont on vient de parler.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 381

(voir tome XVI, page 181);

PAR M. J.-J. HEMMING.

Représentons par Σp *la somme de tous les diviseurs de* p*, l'unité et* p *compris. Soient* $1, d_1, d_2, d_3, \ldots, m$*, tous les diviseurs du nombre* m*. Faisons*

$$\frac{m}{1} = m, \quad \frac{m}{d_1} = \delta_1, \quad \frac{m}{d_2} = \delta_2, \quad \frac{m}{d_3} = \delta_3, \ldots, \frac{m}{m} = 1;$$

on aura cette identité :

$$\Sigma 1 + d_1 \Sigma d_1 + d_2 \Sigma d_2 + d_3 \Sigma d_3 + \ldots + m \Sigma m$$
$$= \frac{m^2}{1} \Sigma 1 + (\delta_1)^2 \Sigma d_1 + (\delta_2)^2 \Sigma d_2 + (\delta_3)^2 \Sigma d_3 + \ldots + 1 \Sigma m,$$

où $\Sigma 1 = 1$. (J. LIOUVILLE.)

Solution. — Décomposons m en facteurs premiers, et soit

$$m = a^\alpha . b^\beta \ldots p^\pi \ldots = \mathrm{P}(p^\pi);$$

il est facile de voir que $\Sigma(d\Sigma d)$ et $\Sigma(\delta^2 \Sigma d)$ ne sont que les développements de ces produits :

$$\mathrm{P}\left[1 + p(1+p) + p^2(1+p+p^2) + \ldots + p^\pi(1+p+p^2+\ldots+p^\pi)\right],$$

$$\mathrm{P}\left[(p^\pi)^2 + (p^{\pi-1})^2(1+p) + (p^{\pi-2})^2(1+p+p^2) + \ldots + (1+p+p^2+\ldots+p^\pi)\right].$$

Mais, puisque

$$1 + p(1+p) + p^2(1+p+p^2) + \ldots + p^\pi(1+p+p^2+\ldots+p^\pi)$$
$$= (p^\pi)^2 + (p^{\pi-1})^2(1+p) + \ldots + p^2(1+p+p^2+\ldots+p^{\pi-1}) + (1+p+p^2+\ldots+p^\pi),$$

les produits sont égaux; d'où

$$\Sigma(d\Sigma d) = \Sigma(\delta^2 \Sigma d).$$

Remarque. — On peut aussi facilement démontrer cette formule

$$\Sigma(d\Sigma d) = \Sigma(\delta^2 \Sigma d) = \frac{\Sigma m . \Sigma(mq)}{\Sigma q},$$

où q désigne le produit de tous les facteurs premiers du nombre m.

Exemple :

$$m = 6, \quad 91 = \frac{12.91}{12}.$$

Question 591

(voir tome XX, page 141);

PAR M. A. S.,
Élève de l'École Polytechnique.

Deux tétraèdres ayant pour volumes V *et* V′, *étant polaires réciproques par rapport à une surface du second ordre dont les demi-axes principaux sont* a, b, c; *si l'on désigne par* V_1, V_2, V_3, V_4 *les volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le centre de la surface aux sommets de* V, *on a la relation*

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V' \frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^3}.$$

(FAURE.)

Je suppose que la surface soit un ellipsoïde, je la rapporte à ses axes, et son équation est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

Soient $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, $x_4 y_4 z_4$ les coordonnées des sommets de V; les faces de V′ sont les plans polaires de ces sommets relativement à la surface, et ont pour équations :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0, \quad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} + \frac{zz_2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{xx_3}{a^2} + \frac{yy_3}{b^2} + \frac{zz_3}{c^2} - 1 = 0, \quad \frac{xx_4}{a^2} + \frac{yy_4}{b^2} + \frac{zz_4}{c^2} - 1 = 0.$$

Le volume du tétraèdre V′ a donc pour expression connue :

$$6V'=\frac{\begin{vmatrix}\frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2} & 1\\ \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2} & 1\\ \frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2} & 1\\ \frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2} & 1\end{vmatrix}^3}{\begin{vmatrix}\frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2}\\ \frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2}\\ \frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2}\\ \frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2}\\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{x_4}{a^2} & \frac{y_4}{b^2} & \frac{z_4}{c^2}\\ \frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2}\\ \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{x_1}{a^2} & \frac{y_1}{b^2} & \frac{z_1}{c^2}\\ \frac{x_2}{a^2} & \frac{y_2}{b^2} & \frac{z_2}{c^2}\\ \frac{x_3}{a^2} & \frac{y_3}{b^2} & \frac{z_3}{c^2}\end{vmatrix}},$$

ce que l'on peut écrire :

$$6V'=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}^3\left(\frac{1}{a^2b^2c^2}\right)^3}{\begin{vmatrix}x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_3 & y_3 & z_3\\ x_4 & y_4 & z_4\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_4 & y_4 & z_4\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\left(\frac{1}{a^2b^2c^2}\right)^4}=a^2b^2c^2\,\frac{(6V)^3}{V_1V_2V_3V_4\,6^4}$$

d'après les expressions connues du volume d'un tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets; de là, enfin, je tire

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2=V'\,\frac{V_1V_2V_3V_4}{V^3}.$$

C'est la relation cherchée.

Question 600
(voir tome XX, page 399);

PAR MM. WIDMANN ET GILLIOT,
Élèves du lycée de Strasbourg (classe de M. Pruvost).

Soient ABCD, MNPQ *deux quadrilatères, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique, et tels, que les sommets du premier soient les points de contact du second : le lieu des centres des coniques circonscrites à* ABCD *est tangent au lieu des centres des coniques inscrites au quadrilatère* MNPQ. (GROS.)

Je prends pour triangle de référence le triangle TT′T″ formé par les diagonales du quadrilatère complet MNPQIK : l'équation d'une conique inscrite dans ce quadrilatère peut être mise sous la forme

$$(1)\qquad \alpha^2 = \frac{\gamma^2}{\mu+1} - \frac{\beta^2}{\mu},$$

μ étant un paramètre variable. Les équations des côtés du quadrilatère sont :

Pour PQ... $\alpha+\beta+\gamma=0$,
MQ... $\gamma+\alpha-\beta=0$,
PN... $\beta+\gamma-\alpha=0$,
MN... $\alpha+\beta-\gamma=0$.

L'ensemble des droites PA et PB est représenté par l'équation

$$(2)\qquad \beta^2+\gamma^2-\alpha^2+2\beta\gamma=0.$$

En cherchant les points communs à ces deux coniques, on aura la corde de contact; or l'élimination de α^2 entre les équations (1) et (2) conduit à l'équation

$$[(\mu+1)\beta-\mu\gamma]^2=0,$$

de sorte que l'équation de la corde de contact AB sera :

$$\text{Pour AB} \ldots \quad \beta - \frac{\mu}{\mu + 1}\gamma = 0.$$

On trouve de même, pour les équations des trois autres côtés du quadrilatère inscrit :

$$\text{Pour CD} \ldots \quad \beta + \frac{\mu}{\mu + 1}\gamma = 0,$$

$$\text{AD} \ldots \quad \alpha - \frac{1}{\mu + 1}\gamma = 0,$$

$$\text{BC} \ldots \quad \alpha + \frac{1}{\mu + 1}\gamma = 0.$$

Considérons une conique particulière inscrite dans le quadrilatère MNPQ ; μ sera déterminé ainsi que les points A, B, C, D, et l'équation générale des coniques passant par ces quatre points sera

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \beta^2 - \left(\frac{\mu}{\mu + 1}\right)^2 \gamma^2 + \lambda\left[\alpha^2 - \left(\frac{1}{\mu + 1}\right)^2 \gamma^2\right] = 0.$$

Cherchons le lieu des centres de ces coniques. On sait que si a, b, c sont les côtés du triangle de référence, α, β, γ les coordonnées du centre de la conique, ces coordonnées vérifient les relations

$$\frac{f'_\alpha}{a} = \frac{f'_\beta}{b} = \frac{f'_\gamma}{c}.$$

Écrivons donc ces équations :

$$\frac{\lambda\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = -\frac{1}{(\mu + 1)^2}\frac{(\mu^2 + \lambda)\gamma}{c}.$$

En éliminant λ, j'ai l'équation du lieu :

$$(3) \qquad \frac{a}{\alpha} + \mu^2\frac{b}{\beta} + (\mu + 1)^2\frac{c}{\gamma} = 0.$$

Ainsi, le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère ABCD, déterminé par les points de contact d'une conique inscrite dans le quadrilatère fixe, est une conique circonscrite au triangle de référence.

Cette conclusion nous conduit au théorème suivant :

Le lieu des centres des coniques coupant un quadrilatère en quatre points donnés, qui sont les points de contact d'une conique inscrite à ce quadrilatère, est une conique circonscrite au triangle formé par les trois diagonales de ce quadrilatère.

Supposons maintenant que la conique inscrite à MNPQ varie, μ variera, et à chaque valeur de μ correspondra un quadrilatère tel que ABCD, qui donnera un lieu analogue à celui que représente l'équation (3). Nous aurons donc ainsi une infinité de coniques circonscrites au triangle de référence. L'équation de ces courbes ne renfermant que le paramètre μ, qui y entre au second degré, nous aurons l'équation de l'enveloppe de ces coniques en exprimant que le premier membre de l'équation (3) est un carré parfait. L'équation développée est :

$$\mu^2\left(\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)+2\mu\frac{c}{\gamma}+\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma}=0.$$

En écrivant que les racines sont égales, nous avons la relation

$$\frac{c^2}{\gamma^2}=\left(\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\right)\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{c}{\gamma}\right),$$

et l'équation de l'enveloppe est

$$(4)\qquad \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0.$$

Ainsi, tous les lieux des centres des coniques circonscrites à des quadrilatères tels que ABCD sont tangents

à une droite. Or cette droite n'est autre chose que le lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère MNPQ. Éliminons en effet μ entre les équations du centre de la conique (1) :

$$\frac{\frac{a}{\alpha}}{\alpha} = \frac{\frac{\beta}{b}}{\mu} = \frac{\frac{\gamma}{c}}{-\mu-1} = \frac{\left(\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)}{1},$$

nous retrouvons l'équation (4), qui représente la droite passant par les milieux des trois diagonales du quadrilatère.

Comme corollaire du théorème énoncé plus haut, nous pourrons dire :

Corollaire. — Cette conique est tangente à la droite qui passe par les milieux des trois diagonales du quadrilatère.

Question 682

(voir 2e série, t. II, p. 550);

PAR M. HEMMING.

Soient les trois variables x, y, z, exprimées par les nouvelles variables u, v, w de la manière suivante :

$$x = \frac{(1+h^2v^2+c^2w^2)u}{u^2+v^2+w^2}, \quad y = \frac{[1-h^2u^2+(c^2-h^2)w^2]v}{u^2+v^2+w^2},$$

$$z = \frac{[1-c^2u^2-(c^2-h^2)v^2]w}{u^2+v^2+w^2};$$

h et c sont des quantités constantes : il faut démontrer que

$$dx^2+dy^2+dz^2 = P^2du^2+Q^2dv^2+R^2dw^2,$$

où $Pu = x$, $Qv = y$, $Rw = z$. (STREBOR.)

Solution. — On aura d'abord

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 du^2 + (2P du + u dP) u dP$$
$$+ Q^2 dv^2 + (2Q dv + v dQ) v dQ$$
$$+ R^2 dw^2 + (2R dw + w dR) w dR;$$

d'autre part, nous déduirons des relations entre x, y, z et u, v, w, sans difficulté,

$$P - Q = h^2, \quad Q - R = c^2 - h^2,$$
$$P u^2 + Q v^2 + R w^2 = 1,$$

d'où résulte

$$dP = dQ = dR,$$
$$(2P du + u dP) u + (2Q dv + v dQ) v + (2R dw + w dR) w = 0.$$

En ayant égard à ces dernières relations, on constate immédiatement l'égalité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = P^2 du^2 + Q^2 dv^2 + R^2 dw^2.$$

Note. — M. Bignon, de Rio-Janeiro, a traité la même question.

Question 699;

PAR M. G.,
Répétiteur au lycée Louis-le-Grand.

En partageant, dans un rapport constant, les normales d'une cycloïde quelconque (ordinaire, allongée ou raccourcie), on obtient une courbe dont les arcs sont exprimables en arcs d'ellipse. (MANNHEIM.)

Une cycloïde *quelconque* a pour équations :

$$(1) \quad \begin{cases} y - a = b \cos u, \\ x - au = b \sin u. \end{cases}$$

Entre les coordonnées d'un point (y, x) de cette courbe

et celles (ξ, η) de la ligne en question, il existe la relation

$$(2) \qquad \frac{\eta}{y} = \frac{\xi - au}{x - au} = n.$$

Différentions les équations (1) et (2), il nous vient :

$$dy = - b \sin u\, du, \qquad d\eta = n\, dy,$$
$$dx = (a + b \cos u)\, du, \quad d\xi = n\, dx + a\, du - na\, du,$$

et, par conséquent,

$$d\eta = - nb \sin u\, du,$$
$$d\xi = (a + bn \cos u)\, du.$$

Donc on a

$$ds = du \sqrt{n^2 b^2 \sin^2 u + (a + bn \cos u)^2}$$
$$= du \sqrt{a^2 + n^2 b^2 + 2abn \cos u}$$
$$= du \sqrt{(a + nb)^2 - 4abn \sin^2 \frac{u}{2}}.$$

Enfin, en posant $\frac{u}{2} = \varphi$, nous obtenons

$$(3) \qquad ds = 2(a + nb)\, d\varphi \sqrt{1 - \frac{4abn}{(a + nb)^2} \sin^2 \varphi}.$$

Pour l'arc d'ellipse, l'élément différentiel est

$$ds = a\, d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

a étant le grand axe et e l'excentricité. Il faut donc que les coefficients de l'expression (3), en appelant A, B, E les axes et l'excentricité d'une ellipse, satisfassent aux relations

$$A = 2(a + nb), \quad E^2 = \frac{4abn}{(a + nb)^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}.$$

C'est ce qui a lieu. En effet,

$$E^2 = \frac{16abn}{4(a+nb)^2} = \frac{[2(a+nb)]^2 - [2(a-nb)]^2}{[2(a+nb)]^2}.$$

Note. — L'auteur de la question en a donné lui-même une solution géométrique dans son Mémoire sur les longueurs comparées d'arcs de courbes différentes (*Journal de l'École Polytechnique*, XL[e] cahier, p. 205).

Question 716

(voir 2[e] série, t. III, p. 448);

PAR M. FONTANEAU,
Ancien officier de Marine.

Quatre cercles OA'C'B', OAB'C, OBCA', OAC'B *passent par un même point* O. *Prouver que les points de concours des cordes* OA', BC; OB', AC; OC', AB *sont en ligne droite; ou encore* OA, B'C; OB, A'C; OC', A'B', *etc.*

Cette proposition peut être considérée comme un cas particulier d'une autre, dont l'énoncé ne diffère du précédent qu'en ce que les cercles y doivent être remplacés par des coniques assujetties à passer par trois points communs o, o', o''.

Pour démontrer cette proposition générale, il suffit de faire voir que les droites OA', OB', OC' forment, avec les droites OA, OB, OC, trois couples de droites en involution (*Géométrie supérieure*, § 359). Cela résulte du théorème suivant :

Soient données : 1° trois coniques assujetties à avoir trois points communs o, o', o'' *et qui, par leurs quatrièmes points d'intersection, donnent un triangle curviligne* ABC; 2° *une quatrième conique, menée aussi par les points* o, o', o'', *et qui coupe les côtés* AB, AC, BC *du*

triangle curviligne aux points C', B', A'. *Si l'on se donne en outre un point arbitraire* M *par lequel on fait passer les six coniques*

$$(oo'o''MA),\quad (oo'o''MB),\quad (oo'o''MC),$$
$$(oo'o''MA'),\quad (oo'o''MB'),\quad (oo'o''MC'),$$

les angles de ces six coniques en l'un quelconque des points o, o', o'', M, *vérifient les relations d'involution.*

Ce théorème, qui résulte, pour moi, d'une méthode spéciale de transformation appliquée à la proposition, § 359, de la *Géométrie supérieure*, peut aussi se démontrer par le principe de correspondance anharmonique.

COROLLAIRE. — *Dans le théorème précédent, les six coniques en involution peuvent être remplacées par les six systèmes de droites*

$$(o'o'', OA),\quad (o'o'', OB),\quad (o'o'', OC),$$
$$(o'o'', OA'),\quad (o'o'', OB'),\quad (o'o'', OC').$$

Les droites OA, OB, OC, OA', OB', OC' *forment donc un faisceau en involution. De ce corollaire résulte donc la solution demandée.*

BULLETIN.

(Tous les ouvrages annoncés dans ce *Bulletin* se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

XXV.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE, t. I (1864) et t. II (1865).

Nous extrayons de cet intéressant recueil quelques articles relatifs aux Mathématiques.

M. Picard (t. I, 1864, p. 9). — *Sur une surface gauche* quelconque il existe généralement, outre les génératrices rectilignes, un système de lignes géodésiques telles, que la courbure le long de chacune de ces lignes soit une fonction de la forme $\frac{-k^2}{(1+k^2x^2)^2}$, k étant une quantité constante pour la même ligne géodésique et x désignant la longueur de cette ligne à partir d'un point fixe. On peut rendre rectiligne, par une déformation de la surface, le système de ces lignes géodésiques.

M. Mannheim (t. I, p. 33). *Sur les surfaces gauches.* — Par une génératrice on fait passer un plan quelconque dans lequel on mène, par un point A de cette droite, une perpendiculaire. Sur cette dernière on prend $AA' = \frac{OA}{\tan A}$. O est un point fixe de la génératrice et A l'angle que le plan tangent mené par le point A fait avec le plan tangent mené au point O. Le lieu des points A' est une ligne droite. Conséquences relatives au point central et au paramètre de distribution.

M. de la Gournerie (t. I, p. 34). *Sur les génératrices singulières des surfaces gauches.* — Lorsqu'une surface gauche est touchée par un même plan à tous les points d'une génératrice, les centres de courbure des sections faites par des plans perpendiculaires à cette droite sont sur une hyperbole dont une asymptote est perpendiculaire à la génératrice. — Cas où cette hyperbole se change en parabole. — Théorème sur la ligne d'ombre, quand le point lumineux est dans le plan tangent le long de la génératrice singulière.

M. Mannheim (t. I, p. 42). *Sur la surface gauche lieu des normales à une surface issues d'un même point.* — Suite de l'article de la page 33.

M. Paul Serret (t. I, p. 43). *Sur le centre d'une surface du second ordre tangente à neuf plans.* — Voir les divers articles de M. Serret sur les analogies de la Géométrie du plan avec celle de l'espace, p. 145, 193 et 433 de ce volume.

M. Abel Transon (t. I, p. 61). *Des quantités prétendues*

imaginaires et de leur emploi pour la transformation des figures.

M. Mannheim (t. I, p. 58). *Sur la surface gauche lieu des normales principales d'une courbe gauche.*

M. Abel Transon (t. I, p. 69). *Réflexion sur les principes de la Mécanique et incidemment sur ceux de la Philosophie positive.* — L'auteur arrive à cette conclusion que les principes fondamentaux de la Dynamique ne sont pas des résultats de l'expérience, mais des conceptions de la raison. Il est impossible, en effet, d'imaginer aucune expérience rigoureuse qui puisse les vérifier.

M. Bour (t. I, p. 74). *Sur les lignes d'ombre d'un héliçoïde quelconque.*

M. Haton de la Goupillière (t. I, p. 109). *Sur les méthodes de transformation propres aux engrenages de roulement cylindriques ou coniques.*

M. Mannheim (t. I, p. 120). *Sur la construction du centre de courbure d'une courbe anallagmatique.*

Nous n'indiquons pas plusieurs communications de M. Moutard sur les anallagmatiques, parce qu'elles ont déjà été insérées *in extenso* dans nos *Annales.*

M. de la Gournerie (t. I, p. 123). *Sur le tore enveloppe* (surface de révolution enveloppe des positions d'un cône du second ordre qui tourne autour d'une droite).

M. Abel Transon (t. I, p. 133). *Nouvelles analogies entre l'Algèbre et le Calcul intégral.* — M. Transon, sans avoir connaissance d'un travail antérieur de M. Brassine sur le même sujet, établit les propriétés des équations différentielles linéaires analogues aux propriétés des équations algébriques. M. Transon a reconnu plus tard la priorité de M. Brassine, dont les divers travaux sur cette question sont réunis dans une Note à la suite du *Cours d'Analyse de Sturm*, 2ᵉ édition.

M. Janin, élève de l'École Polytechnique, et M. Mannheim (t. II, p. 54). — Par un point donné mener des droites doublement tangentes à un tore.

M. Edmond Bour (t. II, p. 41). *Sur la composition des rotations.*

M. Moutard (t. II, p. 66). *Sur la surface de Steiner.* — Cette surface, du quatrième degré, est telle, que tout plan la coupe suivant deux coniques. M. Moutard en découvre les deux propriétés suivantes :

Toute surface de Steiner est le lieu d'un point dont

$\left\{ \begin{array}{l} \text{les racines carrées} \\ \text{les inverses} \end{array} \right\}$ des distances aux quatre $\left\{ \begin{array}{l} \text{faces} \\ \text{sommets} \end{array} \right\}$

d'un tétraèdre satisfont à une relation homogène du premier degré.

M. Grouard, élève de l'École Polytechnique (t. II, p. 68). *Étude sur les figures semblables.* — (Voir *Nouvelles Annales*, t. IV, 2[e] série, p. 546.)

XXVI.

Mossotti. — *Intorno...* Sur un passage de la *Divine Comédie* de Dante, lettre adressée au prince Boncompagni. (Extrait des Actes de l'Académie pontificale *de' Nuovi Lincei.* In-4° de 8 pages. Rome, 1865.

Il s'agit d'un passage (Paradis, livre II) où Béatrice explique à Dante la vraie cause des taches de la lune. Le professeur Mossotti y voit un théorème d'optique qui exige pour sa démonstration la connaissance des propriétés de l'angle visuel et celle de l'affaiblissement de la lumière en raison inverse du carré de la distance.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME IV, 2e SÉRIE.)

Analyse.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Bulletin bibliographique (*).

(*) Tous les comptes rendus non signés sont de M. Prouhet.

Mélanges.

Questions proposées.

(*) La question 726 est identique à la question 719.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME IV, 2e SÉRIE.)

Pages.

Note. — Sur 176 collaborateurs dont les travaux ont été insérés ou mentionnés, il y a 80 élèves de Mathématiques spéciales, dont 33 ont été admis à l'École Polytechnique, 7 à l'École Normale et 3 à l'École Centrale.

ERRATA.

TOME III (2e SÉRIE).

Page 222, ligne 6, *au lieu de* — 35, *lisez* + 15.
Page 222, ligne 7, *au lieu de* 1135, *lisez* 1185.
Page 444, ligne 11, *au lieu de* de ses sommets, *lisez* des points de contact.
Page 477, ligne 28, *après* quelconque, *ajoutez* et $x^2 - a^2$ ne divisant pas $f(x)$.
Page 546, note au bas de la page, *au lieu de* $f(a), f(b),\ldots, f(l)$, *lisez* $F(a), F(b),\ldots, F(l)$.

TOME IV (2e SÉRIE).

Page 77, dernière ligne, *au lieu de* $\left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2$, *lisez* $\frac{1}{\left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2}$.
Page 131, ligne 22, *au lieu de* Ac, *lisez* dC.
Page 180, lignes 10 et 11, *au lieu de* $A\beta_1$, $A\alpha$, $C\beta_1,\ldots$, *lisez* $B\beta_1$, $A\alpha$, $\alpha_1\beta_1,\ldots$.
Page 180, ligne 18, *au lieu de* B, $\beta_1,\ldots$, *lisez* b, $\beta_1,\ldots$.
Page 180, lignes 27 et 28, *au lieu de* (AB, $\alpha_1\beta_1$), (BC, $\beta_1\gamma_1$), (AC, $\alpha_1\gamma_1$),..., *lisez* (BC, $\beta_1\gamma_1$), (AC, $\alpha_1\gamma_1$), (AB, $\alpha_1\beta_1$),....
Page 181, ligne 1, *au lieu de* (Pa, P_1a_1), (Pb, P_1b_1), (Pc, P_1c_1), *lisez* (Pa_1, P_1a), (Pb_1, P_1b), (Pc_1, P_1c).
Page 210, ligne 6, *au lieu de* $\frac{p^n}{y^n} - x^n\ldots$, *lisez* $\frac{p^n}{y^n} = x^n$.
Page 221, ligne 1 en remontant, *au lieu de* d, *lisez* d'.
Page 298, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{n^2}$, *lisez* $\frac{4}{n^2}$.
Page 328, ligne 5, *au lieu de* Demon, *lisez* Deman.
Page 431, ligne 11, *au lieu de* r, r', r'', *lisez* r', r'', r'''.
Page 451, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $\pm\ldots$, *lisez* $+\ldots$.
Page 456, dernière ligne, *au lieu de* $l^2 + 2ab + l^2$ *lisez* $l^2 + 2ab + a^2$.
Page 492, lignes 11 et 16, *au lieu de* p et q, *lisez* P et Q.
Page 492, égalités (2), changer les exposants 1 et 2 des parenthèses en -1 et -2.
Page 526, ligne 18, *au lieu de* discussion, *lisez* décision.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les cinq derniers volumes de la première série et dans les quatre premiers de la deuxième.

TOME XVI, 1re série.

Nos	Pages.
360	58
383 et 385	180
399 et 400	390

TOME XVII.

414 et 424	31
429 et 430	139
434, 437, 439 et 441	186
444 et 445	262
447 et 448	358
454	434

TOME XVIII.

473 et 475	170
480 et 482	266
487 et 489	357
490, 495 et 496	443

TOME XIX.

501, 505 et 506	44
511 à 513	46
525 et 526	234
528 et 529	247
536, 538 et 539	306
541	361
546, 547, 549 et 552	404
554 et 556	464

TOME XX.

558 et 559	55
573	112

TOME XX (suite).

Nos	Pages.
578, 585, 589 et 590	140
592 et 593	216
598	399

TOME Ier, 2e série.

604, 606 et 607	29
613	125
615, 617 et 618	155
631	383

TOME II.

643	93
649	189
656	274
662	336
666	371
673 et 675	479
683	550

TOME III.

693	139
701, 703 et 705	176
711-II et III	442

TOME IV.

718	48
721	86
724 et 725	141
728 à 732	142
736	144
737 à 748	428

FIN DU TOME IV, 2e SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.







